

## 知的情報処理

### 6. 簡便便利な決定木: 作るのは少々難しい

櫻井彰人  
慶應義塾大学理工学部

## 今日の目標

- 決定木の作り方を理解する
  - 構築には、greedy アルゴリズム
    - ノードに置く属性の選択: 情報量増分
      - 「増分比」が必要な局面がある。
    - 復習: 情報量について
  - 回帰もできる(回帰木)
  - R では、tree, rpart を試す

## 目次

- 決定木
  - **決定木とは**
    - 決定木の学習 – 流れ、1ノード、Greedy方略 –
    - ノード上の属性の決め方 –名義属性、数値属性–
    - 復習: エントロピー
    - 不純度を測る物差しとしての情報量、情報量増分
    - あらためて、決定木の構築
    - ちょっと問題が –枝分かれの多い属性–
    - 数値属性
    - GINI
    - 回帰木
    - Rにおいては

## 決定木とは

- 決定木は、他の学習器とかなり異なる
  - 境界は、綺麗な関数ではかけない
  - 何を目標としているか(何が目標関数か)明確ではない
  - アルゴリズムは、OR的なもの(最適化)とはかけ離れている
- けれども、最終ユーザに非常に分かりやすく、誤差もそこそこ小さいため、重要なツールである
- 単純かつ有効なだけに、様々な工夫がされてきている。
  - あなどってはいけない。
- 出来上がった決定木は理解しやすい(すぐ分かる。だから使われる)。しかし、作るのは、結構、難しい。

## 決定木 Decision Trees

- 分類器 Classifiers である
  - 事例(ラベルのついていないもの): 属性 attribute (または特徴 feature) のベクトル
- 内節 Internal Nodes: 属性値のテストを行う
  - 典型的: 等しいかどうかのテスト(e.g., "Wind = ?")
  - その他 不等式や様々なテストが可能
- 枝 Branches: 枝を選ぶ条件である属性値(テストが等式以外のときはテストの結果)
  - 一対一対応(e.g., "Wind = Strong", "Wind = Light")
- 葉 Leaves: 割当てた分類結果(分類クラスのラベル Class Labels)



## どんな時、決定木を用いるか

- 事例が属性 - 属性値ペアで表現される
- 目標関数が離散値をとる(分類問題)
- 選言を含む仮説が必要
  - 属性値に関する連言であれば、「概念学習」で可能
- ノイズが入っている可能性がある
- 例(実際に Mitchell が適用した)
  - 機器故障診断、病名診断
  - 与信リスクの分析
    - クレジットカード、ローン
    - 保険
    - 消費者による不正行為
    - 従業員の不正行為

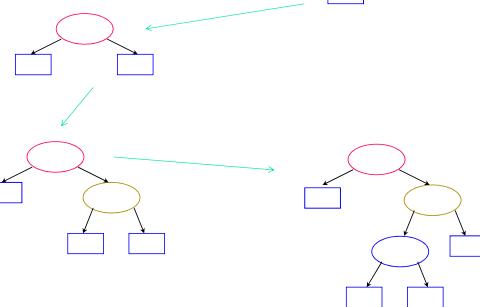


## 目次

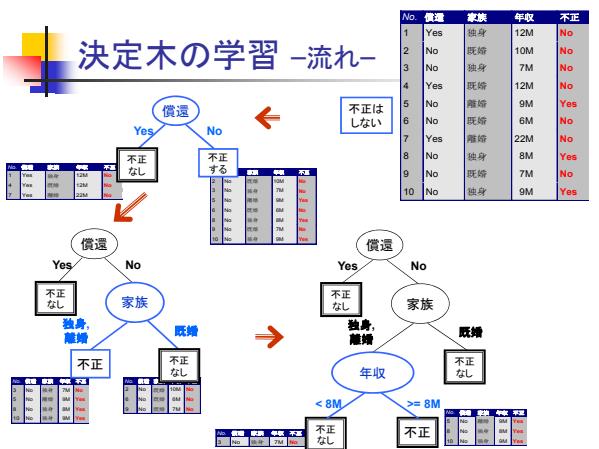
- 決定木
  - 決定木とは
    - 決定木の学習 -流れ、1ノード、Greedy方略 -
    - ノード上の属性の決め方 -名義属性、数値属性-
    - 復習: エントロピー
    - 不純度を測る物差しとしての情報量、情報量増分
    - あらためて、決定木の構築
    - ちょっと問題が -枝分かれの多い属性-
    - 数値属性
    - GINI
    - 回帰木
    - Rにおいては

## 決定木の学習 -流れ-

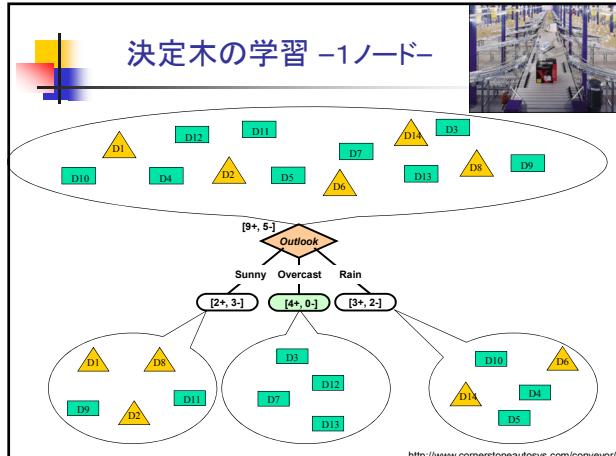
決定木の学習 = 決定木の構築



## 決定木の学習 -流れ-



## 決定木の学習 -1ノード-



## 目次

- 決定木
  - 決定木とは
    - 決定木の学習 -流れ、1ノード、Greedy方略 -
    - ノード上の属性の決め方 -名義属性、数値属性-
    - 復習: エントロピー
    - 不純度を測る物差しとしての情報量、情報量増分
    - あらためて、決定木の構築
    - ちょっと問題が -枝分かれの多い属性-
    - 数値属性
    - GINI
    - 回帰木
    - Rにおいては

## 決定木の作成 -グリーディ方略-

### ■ グリーディな方略.

- 一般: いたん決めたら、心変わりしない
  - 迷路を進むときに、後戻りしない。一度掘んだら離さない。
  - 最適ではないが、後戻りしない分、速い。
- 決定木: 訓練データを、ある評価基準を最適化するように、ある属性で分割する。
  - 一度分割してある枝を作ったら、それを取りやめることはない

目次代わり

### ■ 課題

- 訓練データの分割方法を決定する
  - 属性テスト方法をどう定めるか?
  - 最良の分割をどう決めるか?
- (分割)の止め時の決め方



## 決定木の作成 -グリーディ方略-



### ■ グリーディな方略.

- 一般: いたん決めたら、心変わりしない
  - 迷路を進むときに、後戻りしない。一度掴んだら離さない。
  - 最適ではないが、後戻りしない分、速い。
- 決定木: 訓練データを、ある評価基準を最適化するように、ある属性で分割する。
  - 一度分割してある枝を作ったら、それを取りやめることはない

目次代わり

### ■ 課題

- 訓練データの分割方法を決定する
  - 属性テスト方法をどう定めるか？
  - 最良の分割をどう決めるか？
- (分割の)止め時の決め方

## ノード上の属性の決め方



### ■ 属性タイプによって異なる

- 名義変数
- 順序変数
- 数値変数

### ■ いくつに分割するかによって異なる

- 2分割
- 多分割

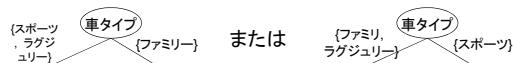
## 名義変数による分割



### ■ 多分割: 当該変数の変数値の「異なり数分」、分割する。



### ■ 2分割: 変数値を2個に分割する。 最適な分割を求める必要あり。



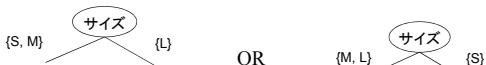
## 順序変数に基づく分割



### ■ 多分割: 異なる値の個数分、分割.



### ■ 2分割: 2つの部分集合に分割。 最適分割を見つける必要あり。



### ■ この分割は?

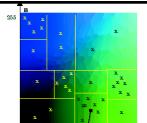
属性値の固有な順序を無視している。

一概にはいえない。

これが良い時もある。



## 数値変数に基づく分割



### ■ 身長、体重、血圧、コレステロール値、、、

- 1単位ずつ分けると分けすぎ。
- 離散化: いくつかの境(閾値ともいう)を設けて、いくつかに分ける。

### ■ いくつかの方法がある

- **離散化** して順序属性として扱う
  - 静的 – 最初に一回だけ離散化
  - 動的 – 等幅区間、等頻度区間(パーセンタイル)、クラスタリング
- **2値判別:**  $(A < v)$  または  $(A \geq v)$ 
  - すべての可能な分割を考え、**ベスト**なものを見出す
    - 学習データは有限個
    - 計算が一層必要となることも

## 決定木の作成 -グリーディ方略-



### ■ グリーディな方略.

- 一般: いたん決めたら、心変わりしない
  - 迷路を進むときに、後戻りしない。一度掴んだら離さない。
  - 最適ではないが、後戻りしない分、速い。
- 決定木: 訓練データを、ある評価基準を最適化するように、ある属性で分割する。
  - 一度分割してある枝を作ったら、それを取りやめることはない

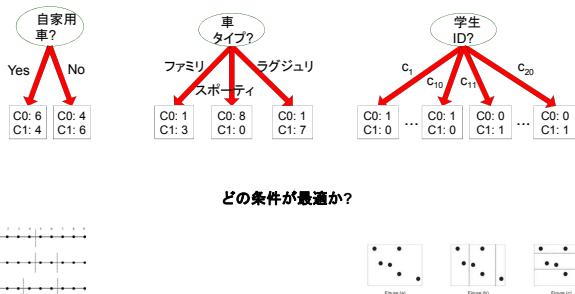
目次代わり

### ■ 課題

- 訓練データの分割方法を決定する
  - 属性テスト方法をどう定めるか？
  - 最良の分割をどう決めるか？
- (分割の)止め時の決め方

## 最良な分割はどうやって見つける？

分割前: C0 (クラス0)に 10 データ,  
C1 (クラス1)に 10 データ



## 最良な分割はどうやって見つける？

### ■ グリーディ方略:

- 新ノード内のクラス分布が 同質となる 分割がベター
- どこかのクラスが圧倒的な多数となる(これが同質)ということは、それだ！といつても間違いが少ない

### ■ (ノードの)同質さの物差しが必要:

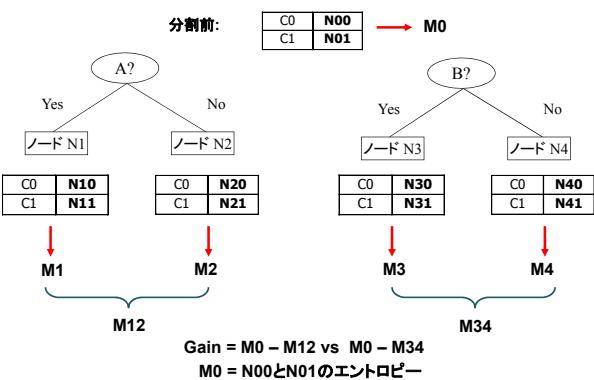
C0: 5  
C1: 5

非-同質, 純度が低い  
不純度が高い

C0: 9  
C1: 1

同質, 純度が高い  
不純度が低い

## 最良な分割はどうやって見つける？



## 不純度のものさし

- エントロピー
- ジニ・インデックス Gini Index
- 誤分類率

## 目次

- 決定木
  - 決定木とは
  - 決定木の学習 -流れ、1ノード、Greedy方略-
  - ノード上の属性の決め方 -名義属性、数値属性-
  - 復習: エントロピー
  - 不純度を測る物差しとしての情報量、情報量増分
  - あらためて、決定木の構築
  - ちょっと問題が -枝分かれの多い属性-
  - 数値属性
  - GINI
  - 回帰木
  - Rにおいては

## エントロピー

- 平均情報量とも呼ばれる。式で書くと

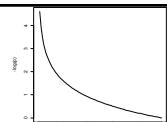
$$H(p_1, \dots, p_m) = -p_1 \log_2 p_1 - \dots - p_m \log_2 p_m \\ = p_1(-\log_2 p_1) + \dots + p_m(-\log_2 p_m)$$

- (比較のために)サイコロの出る目の平均

$$+ p_1 * 1 + p_2 * 2 + \dots + p_6 * 6$$

- つまり、平均情報量が情報量の平均だとすると  
-  $\log_2 p_i$  が「情報量」ということになる

負の符号「-」がついているのは、 $p < 1$  故  $\log p < 0$  となるが、負の数はいろいろと不便なため、符号反転しているから OR  $\frac{1}{2}$  のべき乗を考えるから(2のべき乗ではない)



## 情報量

ある事象の情報量は、その事象が起こったということを（他の皆が知らないときに）知ることの価値

「事象」として「コインの表が出ること」（確率 $1/2$ ）としよう。  
「表が出たこと」を知る価値を  $a$  としよう。  
「コイン1が表」「コイン2が表」という2つの情報を知る価値は  $a + a = 2a$  だろう（一つずつ聞く場合を考えればよい）。  
「コイン1が表」「コイン2が表」の二つの事象が起こる確率は  $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 1/4$ 。  
「事象」として「サイコロの1が出ること」（確率 $1/6$ ）としよう。  
「1が出たこと」を知る価値を  $b$  としよう。  
「サイコロ1が1」「サイコロ2が1」という2つの情報を知る価値は  $b + b = 2b$  だろう（一つずつ聞く場合を考えればよい）。  
「コイン1が表」「コイン2が表」の二つの事象が起こる確率は  $1/6 * 1/6 = 1/36$ 。  
つまり、事象が起こる確率が2乗になると、価値は2倍になる




## 情報量を表す関数

事象が起こる確率が2乗になると、価値は2倍になる

事象が起こる確率  $p$  が  $p^2$  になると、価値  $v$  は  $2v$  になる

予想屋を想像して下さい、一度予想して正解して報酬を得る。再び予想して正解して報酬を得る。  
2回とも正解の確率は積、報酬は和でしょう？

事象が起こる確率  $p$  が  $p^2$  になると、価値  $v(p)$  は  $v(p^2) = 2v(p)$  になる

上記のような関数は  $\log$  しかないことが示せる（底は決まらない。報酬による）

そこで、底を2とし価値が正になるように符号反転すると（底を $1/2$ にしたのと同じ）、生起確率  $p$  の事象が生起したことを知るという情報の価値は、 $-\log p$  とすればよいことが分る。

$$\text{情報量}(p) = -\log_2 p = \log_{1/2} p$$

## 不公平かもしれないコイン

- 表が出る確率  $p$ 、裏が出る確率が  $1-p$  であるコインのコイン投げを考える。
- このコインを1回投げたときに出た「表・裏」を知る情報の価値はどのくらいであろうか？
- 「表が出る」という情報の価値は、 $-\log p$ 、「裏が出る」という情報の価値は、 $-\log(1-p)$ である。
- 表が出る確率は  $p$ 、裏が出る確率は  $1-p$  であるので、この確率に基づく（情報価値の）平均値を考えよう

$$H(p, 1-p) = p(-\log_2 p) + (1-p)(-\log_2(1-p)) \\ = -p \log_2 p - (1-p) \log_2(1-p)$$

## 不公平かもしれないサイコロ

- 「目iが出る」確率  $p_i$  であるサイコロを考える。
- このサイコロを1回投げたときに出了目を知る情報の価値はどのくらいであろうか？
- 「目iが出る」という情報の価値は、 $-\log p_i$ である。
- この確率に基づく（情報価値の）平均値を考えよう

$$H(p_1, p_2, \dots, p_6) \\ = p_1(-\log_2 p_1) + p_2(-\log_2 p_2) + \dots + p_6(-\log_2 p_6) \\ = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 - \dots - p_6 \log_2 p_6$$

## 目次

- 決定木
  - 決定木とは
  - 決定木の学習 – 流れ、1ノード、Greedy方略 –
  - ノード上の属性の決め方 – 名義属性、数値属性 –
  - 復習: エントロピー
  - 不純度を測る物差しとしての情報量、情報量増分**
  - あらためて、決定木の構築
  - ちょっと問題が – 枝分かれの多い属性 –
  - 数値属性
  - GINI
  - 回帰木
  - Rにおいては

## 不純度を測る物差しとしての情報量

- 不純度
  - 2種類の個体が混在している場合を考える。割合を  $p$  と  $1-p$  とする。 $p=0$  または  $p=1$  のときは最も純粋であるので、このとき  $0, p=1/2$  のとき最も純度が低いので、このとき  $1$  になるような関数があるとよい。明らかにエントロピーがその性質を満たす。
  - 一般に  $n$  種類の個体が混在している場合はどうだろうか。割合を  $p_1, \dots, p_n$  とする。 $p_i$  のいずれかが  $1$  で他が  $0$  というときが最も純度が高い。逆に  $p_i$  のすべてが等しいとき（ $1/n$  の時）最も純度が低い。明らかにエントロピーはこの性質をもつ。そこで、

$$\text{non-Information}(D) = H(D) = \sum_{c \in \text{classes}(D)} \left[ -\frac{|D_c|}{|D|} \log \frac{|D_c|}{|D|} \right]$$

- 補足: エントロピー値は、「集合の要素一個あたり」の情報量となっている

## 情報量増分

要は、逆を考えて、下るに従い、「混沌さ」が減ればよい「クリア」になればよい

- 定義**
  - 属性 Aに関するDの情報量増分は、Aを用いた分割によるエントロピー減少分の期待値:
$$InformationGain(D, A) = H(D) - \sum_{v \in \text{values}(A)} \left[ \frac{|D_v|}{|D|} H(D_v) \right] = \frac{1}{|D|} \left( |D| \cdot H(D) - \sum_{v \in \text{values}(A)} |D_v| \cdot H(D_v) \right)$$
  - 但し  $D_v$  は  $\{x \in D \mid x.(A) = v\}$ 。すなわち、D中の事例で属性 Aの値が vであるものの集合
  - 補足: Aによる分割によって生じる部分集合  $D_v$  の大きさに従ってエントロピーの大きさを調整
    - エントロピー値は、「集合の要素一個あたり」の情報量となっているため
- どちらの属性を使うのがいい?**

混沌さが小  
エントロピーが小

## 目次

- 決定木**
  - 決定木とは
  - 決定木の学習 - 流れ、1ノード、Greedy方略 -
  - ノード上の属性の決め方 -名義属性、数値属性-
  - 復習: エントロピー
  - 不純度を測る物差しとしての情報量、情報量増分
  - あらためて、決定木の構築
  - ちょっと問題が -枝分かれの多い属性-
  - 数値属性
  - GINI
  - 回帰木
  - Rにおいては

## あらためて: 決定木の構築

- 通常の手順: 上から下に(根から葉へ)そしてgreedy、再帰的かつ分割統治(divide-and-conquer)**
  - まずは: 一つの属性を選び根とする。属性値ごとに枝を作る
  - 次は: 訓練データを部分集合に分割(枝一本につき一個)
  - 最後に: 同じ手順を、個々の枝について行う。その場合、個々の枝に割り当てられた訓練データのみを用いる(全体は用いない)
- ノードに(それへの枝に)割り当てられた訓練データがすべて同じクラスになったら、終了**

<http://www.freepatentsonline.com/7086519.html>

## テニスをするや否や

Outlook	Temp.	Humidity	Windy	Play
Sunny	Hot	High	False	No
Sunny	Hot	High	True	No
Overcast	Hot	High	False	Yes
Rainy	Mild	High	False	Yes
Rainy	Cool	Normal	False	Yes
Rainy	Cool	Normal	True	No
Overcast	Cool	Normal	True	Yes
Sunny	Mild	High	False	No
Sunny	Cool	Normal	False	Yes
Rainy	Mild	Normal	False	Yes
Sunny	Mild	Normal	True	Yes
Overcast	Mild	High	True	Yes
Overcast	Hot	Normal	False	Yes
Rainy	Mild	High	True	No

Tom Mitchell "Machine Learning" の例題. よく使われる

## どの属性がいいのか？

(a) outlook: sunny, overcast, rainy. Sub-nodes: yes, yes, no, no; yes, yes, yes, yes; no, no, no, no.

(b) temperature: hot, mild, cool. Sub-nodes: yes, yes, no, no; yes, yes, yes, no; no, no, no, no.

(c) humidity: high, normal. Sub-nodes: yes, yes, yes, no, no, no; yes, yes, yes, yes, no, no.

(d) windy: false, true. Sub-nodes: yes, yes, yes, yes, yes, no; yes, yes, yes, no, no, no.

## 属性選択の基準

- どの属性が最適化?**
- できあがる決定木が最小のものがよい**
  - ヒューリスティック: “純度” 最高の属性を選ぶ
  - 「最小」のものを選ぶことに関して、深遠な議論がある
- 良く使われる“不純度”的基準: (ノードの)エントロピー**
  - エントロピーが低いほど、ノードの“純度”は高い。
- 方略: 子供のノードのエントロピーが最小となる属性を選べ。**

<http://splinedoctors.com/2009/02/hurry-up-and-choose/>

## 計算例: 属性 “Outlook”



“Outlook” = “Sunny”:

$$\text{info}(2,3) = \text{entropy}(2/5,3/5) = -(2/5)\log(2/5) - (3/5)\log(3/5) = 0.971$$

“Outlook” = “Overcast”:

$$\text{info}(4,0) = \text{entropy}(1,0) = -1\log(1) - 0\log(0) = 0$$

“Outlook” = “Rainy”:

$$\text{info}(3,2) = \text{entropy}(3/5,2/5) = -(3/5)\log(3/5) - (2/5)\log(2/5) = 0.971$$

この属性を用いたときの情報量は

$$\text{info}(3,2)[4,0][3,2] = (5/14)\times 0.971 + (4/14)\times 0 + (5/14)\times 0.971 = 0.693 \text{ bits}$$

$$\begin{aligned} \text{InformationGain}(D, A) &= H(D) - \sum_{v \in \text{values}(A)} \left[ \frac{|D_v|}{|D|} \cdot H(D_v) \right] \\ &= \frac{1}{|D|} \left[ |D| \cdot H(D) - \sum_{v \in \text{values}(A)} |D_v| \cdot H(D_v) \right] \end{aligned}$$

<http://www.space.com/4700-weather-outlook-improves-thursday-shuttle-launch.htm>

## 計算例: 情報量増分

- ただし、通常は、ノードのエントロピーを直接用いることはない。情報量増分を用いる。

情報量増分: 分割前の情報量 – 分割後の情報量

$$\text{gain}(\text{"Outlook"}) = \text{info}(9,5) - \text{info}(2,3)[4,0][3,2] = 0.940 - 0.693 = 0.247 \text{ bits}$$

同様に計算すると

$$\text{gain}(\text{"Outlook"}) = 0.247$$

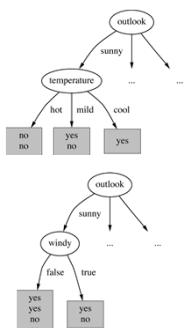
$$\text{gain}(\text{"Temperature"}) = 0.029$$

$$\text{gain}(\text{"Humidity"}) = 0.152$$

$$\text{gain}(\text{"Windy"}) = 0.048$$

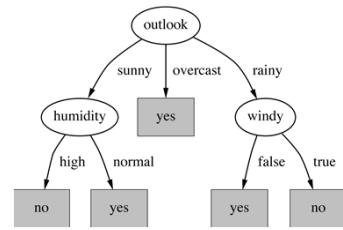
- 情報量増分が多いほど、純度が高い。従って、“Outlook”を選ぶことにする。

## 分割を続ける



$$\begin{aligned} \text{gain}(\text{"Temperatuue"}) &= 0.571 \text{ bits} \\ \text{gain}(\text{"Humidity"}) &= 0.971 \text{ bits} \\ \text{gain}(\text{"Windy"}) &= 0.020 \text{ bits} \end{aligned}$$

## 最終的に得られる決定木



- 注: すべての葉が“純”である必要はない; というのも、同じデータなのにクラスが違うことがあるから(ノイズのせい)  
⇒ データがそれ以上分割しない方がよくなったら、やめ

<http://www.mochadad.com/2011/01/the-importance-of-family-goal-setting>

## 目次

- 決定木
  - 決定木とは
  - 決定木の学習 – 流れ、1ノード、Greedy方略 –
  - ノード上の属性の決め方 –名義属性、数値属性–
  - 復習: エントロピー
  - 不純度を測る物差しとしての情報量、情報量増分
  - あらためて、決定木の構築
  - **ちょっと問題が枝分かれの多い属性**
  - 数値属性
  - GINI
  - 回帰木
  - Rにおいては

## ちょっと問題が

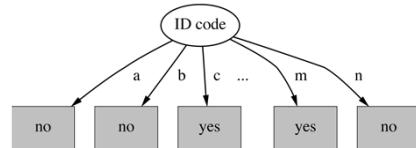
- 属性値の多い属性(例えば、ID)があると、おかしくなる
  - 属性値の多い属性が選ばれてしまう
  - 選んでみると、おかしい！

## 枝数が非常に多くなる属性があると、..、

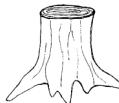
### ■ IDコードをつけてみよう

ID code	Outlook	Temp.	Humidity	Windy	Play
A	Sunny	Hot	High	False	No
B	Sunny	Hot	High	True	No
C	Overcast	Hot	High	False	Yes
D	Rainy	Mild	High	False	Yes
E	Rainy	Cool	Normal	False	Yes
F	Rainy	Cool	Normal	True	No
G	Overcast	Cool	Normal	True	Yes
H	Sunny	Mild	High	False	No
I	Sunny	Cool	Normal	False	Yes
J	Rainy	Mild	Normal	False	Yes
K	Sunny	Mild	Normal	True	Yes
L	Overcast	Mild	High	True	Yes
M	Overcast	Hot	Normal	False	Yes
N	Rainy	Mild	High	True	No

## IDコードを根にもってくると、“切株”



この分割のエントロピー  
 $\text{info}(\text{"IDcode"}) = \text{info}([0,1]) + \text{info}([0,1]) + \dots + \text{info}([0,1]) = 0 \text{ bits}$   
 $\Rightarrow$  情報量増分は最大となる(すなわち、0.940 bits)



<http://www.extension.umn.edu/yardandgarden/ygbriefs/h446removetree.html>

## 枝分かれの多い属性

従って、

- 属性値が多いと、訓練データの部分集合は“純”になりやすい
  - 情報量増分は、属性値の多い属性の方にバイアスしている
  - この結果、過学習 overfitting (過去のデータの学習という意味では素晴らしいが、予測のためには最適でない属性を選んでしまう)になってしまう。

## 一つの解決法: 増分比

- 増分比 Gain ratio: 情報量増分のもつバイアスを減少させる
- 増分比は、枝の本数とそれに割り当てられる訓練データの大きさの両方を勘定に入れる
  - 情報量増分の修正は、訓練データの集合をどのような(大きさと要素数の)部分集合に分割するかという分割の情報量を用いて、行われる

## 増分比の計算例

計算例: IDコードの分割情報量(split information)  
 $\text{info}([1,1,\dots,1]) = 14 \times (-1/14) \log(1/14) = 3.807 \text{ bits}$

増分比の定義

$\text{gain\_ratio}(\text{"Attribute"}) = \text{gain}(\text{"Attribute"}) / \text{split\_info}(\text{"Attribute"})$   
 計算例:  
 $\text{gain\_ratio}(\text{"IDcode"}) = 0.940 \text{ bits} / 3.807 \text{ bits} = 0.246$

$$\begin{aligned} \text{InformationGain}(D, A) &= H(D) - \sum_{v \in \text{values}(A)} \left[ \frac{|D_v|}{|D|} H(D_v) \right] \\ \text{SplitInformation}(D, A) &= - \sum_{v \in \text{values}(A)} \left[ \frac{|D_v|}{|D|} \log \left( \frac{|D_v|}{|D|} \right) \right] \\ &= H \left( \frac{|D_1|}{|D|}, \frac{|D_2|}{|D|}, \dots, \frac{|D_{14}|}{|D|} \right) \end{aligned}$$

## 他の属性に関する増分比

Outlook	Temperature
Info:	0.693
Gain: 0.940-0.693	0.247
Split info: $\text{info}([5,4,5])$	1.577
Gain ratio: $0.247/1.577$	0.156
Humidity	Windy
Info:	0.788
Gain: 0.940-0.788	0.152
Split info: $\text{info}(7,7)$	1.000
Gain ratio: $0.152/1$	0.152

ID
Info:
Gain:
Split info:
Gain ratio:

## 解決した？解決しない？

- “Outlook”がトップであるが、今度は“Humidity”が肉薄している。というのも、“Humidity”は2個に分割するため、増分比が相対的に良くなるためである。
- 見ればわかるように：“ID code”的増分比が最大！  
そのアドバンテージは大分と減少したが。
- 増分比の問題点：過補償となるおそれがあること
  - 分割情報量が小さいために、不適当な属性が選ばれる可能性
  - よくある修理方法：増分比が最大のものを選ぶのだが、当該属性の情報量増分は、少なくとも、情報量増分の平均値（全属性で考えて）はあるものという条件を課す。

## 補足

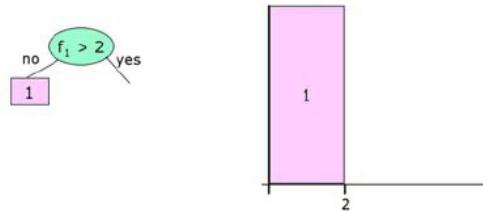
- 決定木のトップダウン（根から葉へ）アルゴリズム（“ID3”）は、Ross Quinlan (University of Sydney Australia) が開発
- 増分比は、このアルゴリズムの基本的な改良の一つ
  - これに引き続き開発されたのが C4.5。数値属性、欠測値、ノイズのあるデータが扱える
- 属性選択には他の方法がたくさんある！（といっても、結果の精度にはあまり違いがない）

## 目次

- 決定木
  - 決定木とは
  - 決定木の学習 – 流れ、1ノード、Greedy方略 –
  - ノード上の属性の決め方 –名義属性、数値属性–
  - 復習：エントロピー
  - 不純度を測る物差しとしての情報量、情報量増分
  - あらためて、決定木の構築
  - ちょっと問題が –枝分かれの多い属性–
  - 数値属性
  - GINI index
  - 回帰木
  - Rにおいては

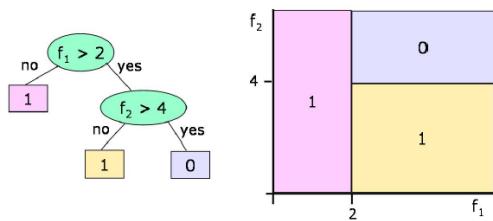
## 数値属性

- 属性テストは次の形をとる  $x_j >$  ある定数
- 属性値のなす空間を矩形に分割する

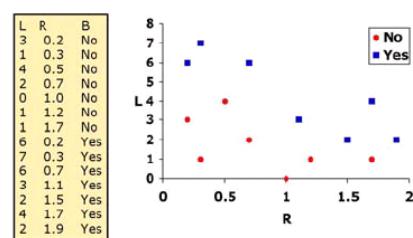


## 数値属性

- 異論、これでもいい  $x_j >$  ある定数
- 矩形への分割は同じ

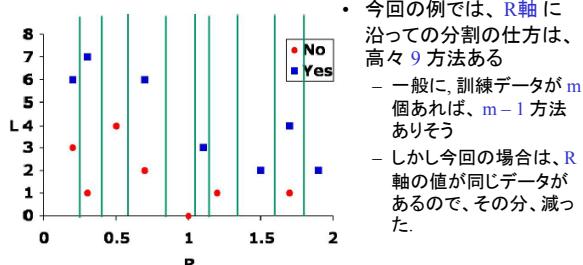


## 破産の予測



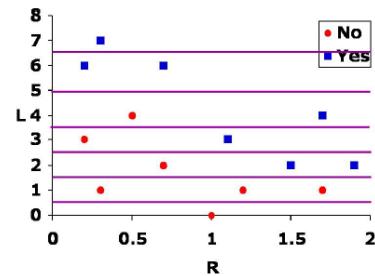
## 分割を考えよう

- 各属性ごとに、分割することを考えよう

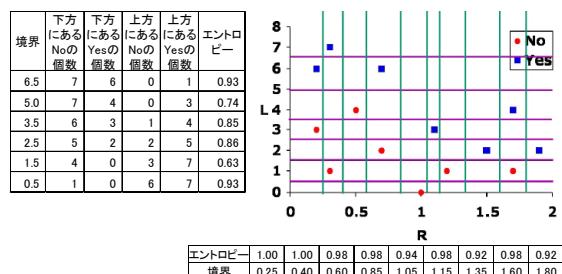


## 分割その II

- L 軸では高々 6 方法ある
- L 軸は整数値をとるので、値が重複するデータは多い。

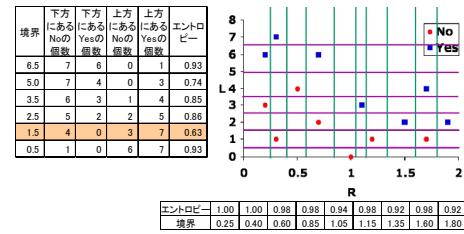


## 分割によるエントロピーを計算



## 承前

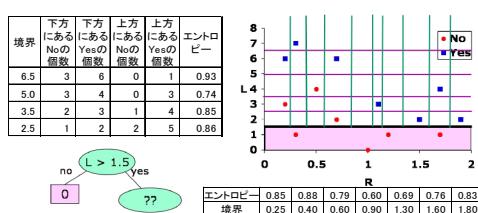
- それぞれの軸でのすべての可能性を考え、分割した場合のエントロピーを計算した



- たまたま、L 軸で、境界を 1.5 とした場合、片側が No だけになることがわかった(エントロピーも最小)

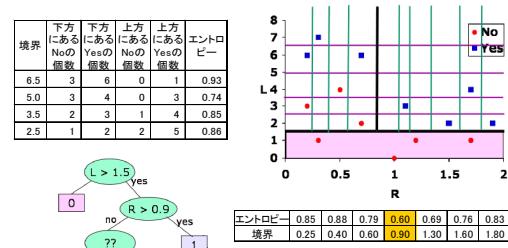
## 承前

- 残りの空間のすべての分割を考える。
- エントロピーは再計算が必要。すでに葉に割り当てられた訓練データは取り除いて考えなければならないから。



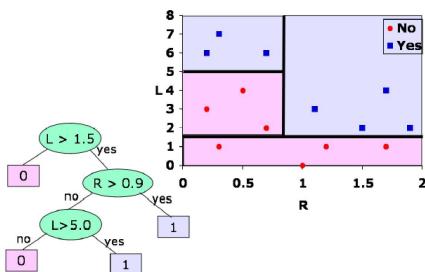
## 承前

- 今度の最適な分割は  $R > 0.9$  である。しかも、すべて Yes であるので、葉を作ることができる。



## 承前

- これを続ければ次のものが得られる:



## 目次

### ・決定木

- 決定木とは
- 決定木の学習 - 流れ、1ノード、Greedy方略 -
- ノード上の属性の決め方 -名義属性、数値属性-
- 復習: エントロピー
- 不純度を測る物差しとしての情報量、情報量増分
- あらためて、決定木の構築
- ちょっと問題が -枝分かれの多い属性-
- 数値属性
- GINI index
- 回帰木
- Rにおいては

## GINIに基づく分割基準

- これまで説明してきた分割基準はエントロピーであった:

$$Entropy(t) = -\sum_j p(j|t) \log p(j|t)$$

(注:  $p(j|t)$  はノード  $t$  におけるクラス  $j$  データの相対頻度).

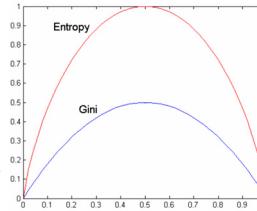
- 別法に GINI インデックスを用いるものがある:

- 両者とも:

- 最大値 ( $\log n_c$  または  $1 - 1/n_c$ ) が得られるのは、当該データがどのクラスにも等分に分配されているときである。「等分である」ということは何の面白さもない。しかし、この状態で、ずっと「実はこれ！」と教わり続けることは結構価値のあることである。
- 最小値 (0.0) に近い値が得られるのは、ほとんどすべてのデータが同一のクラスに属するとき、少數派が発生する場合は、非常に面白い。けれども、たいていは多數派が発生するので、まったく面白くない。

2個のクラスに分ける場合:

$$GINI(t) = 1 - \sum_j [p(j|t)]^2$$



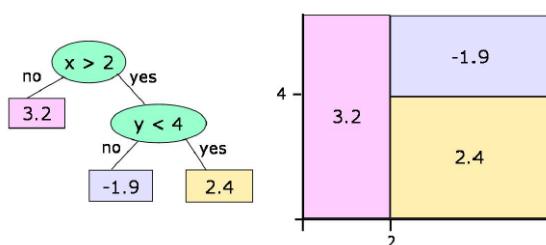
## 目次

### ・決定木

- 決定木とは
- 決定木の学習 - 流れ、1ノード、Greedy方略 -
- ノード上の属性の決め方 -名義属性、数値属性-
- 復習: エントロピー
- 不純度を測る物差しとしての情報量、情報量増分
- あらためて、決定木の構築
- ちょっと問題が -枝分かれの多い属性-
- 数値属性
- GINI index
- 回帰木
- Rにおいては

## 回帰木 Regression Trees

- 決定木と同じ、但し 葉において、実数値定数を出力する.

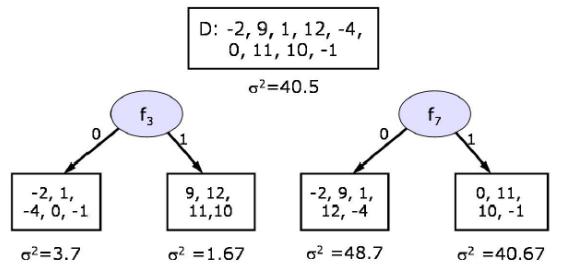


## 葉における値

- 今いる葉ノードには複数個のデータがあると仮定しよう。なおかつ、何らかの理由により、このノードはこれ以上分割しないものとする。
- 離散値の場合(これまでの場合)、葉における値(出力値)は、その葉における多數派の値としていた。
- 数値属性の場合、妥当な値は平均値であろう。
- 従って、もし葉ノードにおける出力値として平均値を用いるならば、(これからノードを分割して子供が葉ノードになろうというときには)枝分かれして作られる新たな葉ノードにおいて、データのもつ値が、当該葉ノード内の値の平均値よりあまり離れていない方がよからう。
- 統計学には、数値の集合がどのくらい分散しているかを表す尺度がある
  - 言い換れば、個々の数値が平均値からどれだけ離れているか;
  - ご存じの分散である。

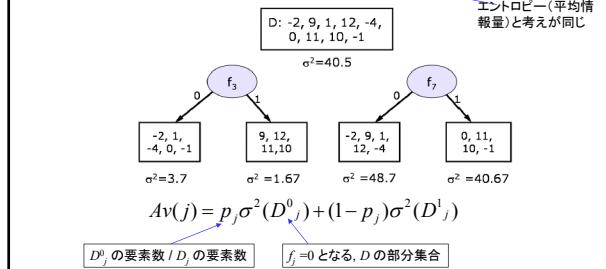
## ノード分割(データの分割)

- 分割のよさを計る尺度として分散の平均値を用いることにする。
- (出力たるべき)  $y$  値のみを記す。



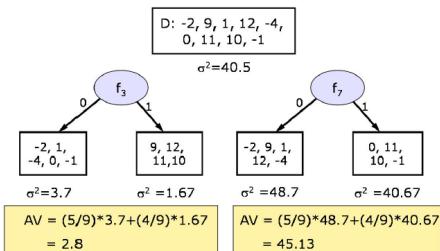
## ノード分割

- 離散値の場合と同様に、分散の平均値を計算するとき、各新ノードに渡されるデータ数で重み付けた、重み付き平均値を用いることにする(そうでなければならぬ)。



## ノード分割

- 簡単に計算できることだが、属性3を用いた分割の場合の分散平均値は、属性7を用いた場合のそれより、非常に小さい。従って、属性3を選ぶことになる。

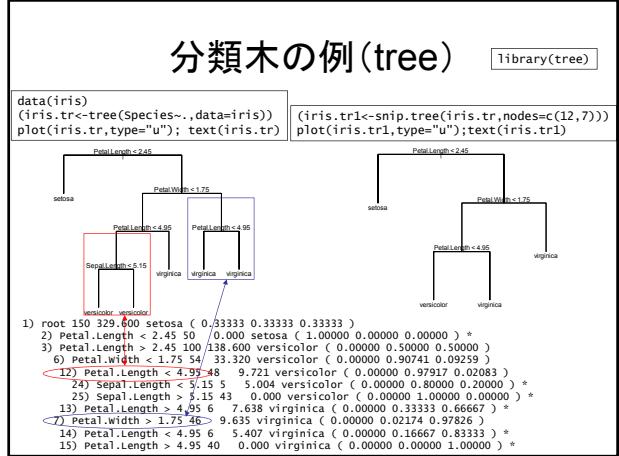


## 目次

- 決定木**
  - 決定木とは
  - 決定木の学習 -流れ、1ノード、Greedy方略 -
  - ノード上の属性の決め方 -名義属性、数値属性-
  - 復習: エントロピーー
  - 不純度を測る物差しとしての情報量、情報量増分
  - あらためて、決定木の構築
  - ちょっと問題が-枝分かれの多い属性-
  - 数値属性
  - GINI index
  - 回帰木
  - Rにおいては

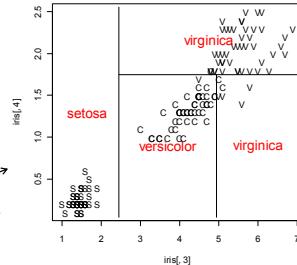
## Rにおける決定木

- Rには、決定木関連のパッケージとして、tree、rpart、及び rpart を多変量回帰木(multivariate regression trees)に拡張させた mvpart がある。



## 分類木の例(tree)

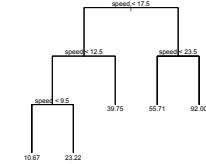
```
library(tree)
(iris.tr1<-snip.tree(iris.tr.nodes=c(12,7)))
iris.label<-c("S", "C", "V")[iris[, 5]]
plot(iris[, 3],iris[, 4],type="n")
text(iris[, 3],iris[, 4],label=iris.label)
partition.tree(iris.tr1,add=T,col=2,cex=1.5)
```



## 回帰木の例(tree)

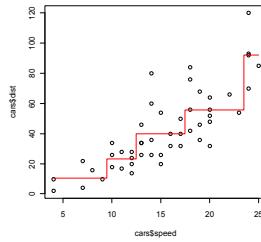
```
> Library(tree)
> data(cars)
> cars.tr<-tree(dist~speed,data=cars)
> print(cars.tr)
node), split, n, deviance, yval
* denotes terminal node
1) root 50 32540.0 42.98
  2) speed < 17.5 31 8307.0 29.32
    4) speed < 12.5 15 1176.0 18.20
      8) speed < 9.5 6 277.3 10.67 *
      9) speed > 9.5 9 331.6 23.22 *
     5) speed > 12.5 16 3535.0 39.75 *
     3) speed > 17.5 19 9016.0 65.26
     6) speed < 23.5 14 2847.0 55.71 *
     7) speed > 23.5 5 1318.0 92.00 *
> plot(cars.tr,type="u")
> text(cars.tr)
> plot(cars.tr,type="u")
> text(cars.tr)
```

```
Library(tree)
data(cars)
cars.tr<-tree(dist~speed,data=cars)
print(cars.tr)
plot(cars.tr,type="u")
text(cars.tr)
plot(cars.tr,type="u")
text(cars.tr)
```



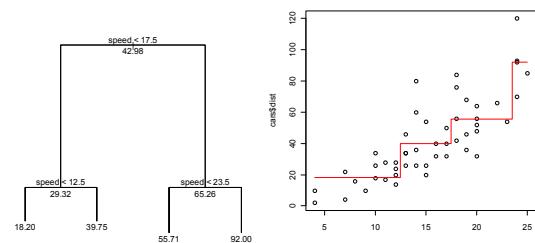
## 回帰木の例(tree)

```
> plot(cars$speed,cars$dist)
> partition.tree(cars.tr,add=T,col=2)
>
```



## 回帰木の例(tree)

```
(cars.tr1<-prune.tree(cars.tr,best=4))
plot(cars.tr1); text(cars.tr1,all=T)
plot(cars$speed,cars$dist)
partition.tree(cars.tr1,add=T,col=2)
```



## では、別のデータで

- 例によって、テニスのデータを用いてみよう
- このデータの特徴は、すべての属性が離散値であること

Outlook	Temp.	Humidity	Wind	Play
Sunny	Hot	High	False	No
Sunny	Hot	High	True	No
Overcast	Hot	High	False	Yes
Rainy	Mild	High	False	Yes
Rainy	Cool	Normal	False	Yes
Rainy	Cool	Normal	True	No
Overcast	Cool	Normal	True	Yes
Sunny	Mild	High	False	No
Sunny	Cool	Normal	False	Yes
Rainy	Mild	Normal	False	Yes
Sunny	Mild	Normal	True	Yes
Overcast	Mild	High	True	Yes
Overcast	Hot	Normal	False	Yes
Rainy	Mild	High	True	No

```
library(tree) したあと
> setwd("D:/R/Sample")
> playTennis <- read.csv("PlayTennis.csv", header=T)
> (playTennis.tr<-tree(Play~.,data=playTennis))
node), split, n, deviance, yval, (yprob)
* denotes terminal node
```

```
1) root 14 18.250 Yes ( 0.3571 0.6429 )
  2) Humidity: High 7 9.561 No ( 0.5714 0.4286 ) *
  3) Humidity: Normal 7 5.742 Yes ( 0.1429 0.8571 ) *
> plot(playTennis.tr); text(playTennis.tr)
```

これは失敗と言つていいでしょう。なぜこうなってしまったのでしょうか？それは、枝分かれするときの条件が厳しく(つまり、枝分かれしないように)なっているからです。

それ(つまり、制御の仕方)を調べてみましょう。

?tree

として下さい。“tree”的説明書が得られます。しかし、木を生成するときの制御の仕方にについての記述は見つかりません。こういふときは、controlというキーワードを探してみます。下の方にcontrol.treeという文言があります。ここをクリックするか

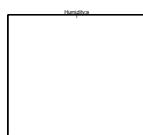
?control.tree

としてみてください。tree.control(nobs, mincut = 5, minsize = 10, mindev = 0.01)が制御方法であり、default値であることが分かります。多少試行錯誤すると、treeにおいては、mincut = 1, minsize = 2が最小値、つまり、最も木が発達しやすいパラメータであることが分かります。そこで、tree.control(length(playTennis[,1]), mincut = 1, minsize = 2)

としてみますが、結果は変わりません。

理由は分かりません。

やむをえず、別のライブラリを使うことにします。



```

> library(rpart)
> setwd("D:/R/Sample")
> playTennis <- read.csv("PlayTennis.csv", header=T)
> (playTennis.tr <- rpart(Play~ ., playTennis) )
n= 14

(node), split, n, loss, yval, (yprob)
      * denotes terminal node

1) root 14 5 Yes (0.3571429 0.6428571) *
> plot(playTennis.tr); text(playTennis.tr)

以下にエラー plot.rpart(playTennis.tr) : fit is not a tree, just a root

```

これはもっと悪い。枝分かれせず、根のみとなってしまった。

先ほどと同様に

?rpart

としてみましょう。今度は引数に control というものがあります。その下にある例題を見ると、rpart.control を使えばよいことが分かります。rpart.control をクリックするか ?rpart.control としてみましょう。Minsplit を小さくすれば良さうなことが想像できます。試してみましょう。

```

> library(rpart)
> setwd("D:/R/Sample")
> playTennis <- read.csv("PlayTennis.csv", header=T)
> (playTennis.tr <- rpart(Play~ ., playTennis,
+ control=rpart.control(minsplit=1)) )
n= 14

node), split, n, loss, yval, (yprob)
      * denotes terminal node

1) root 14 5 Yes (0.3571429 0.6428571)
  2) Outlook=Rainy, Sunny 10 5 No (0.5000000 0.5000000)
    4) Humidity=High 5 1 No (0.8000000 0.2000000)
      8) Outlook=Sunny 3 1 No (1.0000000 0.0000000) *
      9) Outlook=Overcast 1 0 Yes (0.5000000 0.5000000)
      18) Windy=True 1 0 No (1.0000000 0.0000000) *
      19) Windy=False 1 0 Yes (0.0000000 1.0000000) *
    5) Humidity=Normal 5 1 Yes (0.2000000 0.8000000)
    10) Windy=True 2 1 No (0.5000000 0.5000000)
    20) Outlook=Rainy 1 0 No (1.0000000 0.0000000) *
    21) Outlook=Sunny 1 0 Yes (0.0000000 1.0000000) *
    11) Windy=False 3 0 Yes (0.0000000 1.0000000) *
  3) Outlook=Overcast 4 0 Yes (0.0000000 1.0000000) *
> plot(playTennis.tr); text(playTennis.tr)

```

今度はうまく行ったようである。では、未知データがどう分類されるか見てみよう。

"predict" について rpart の説明書中には記述がない。

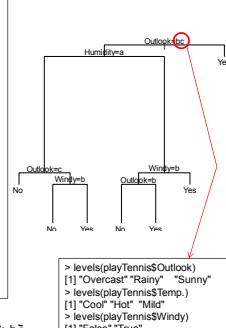
こういったときは、?predict.rpart としてみる（つまり、クラス rpart のメソッド predict）。

パッケージ e1071 の naiveBayes とは異なり、次のように簡単にテストできる。

```

PlayTennisTest02 <- read.csv("PlayTennisTest02.csv", header=TRUE)
predict(playTennis.tr, PlayTennisTest02)

```



```

> playTennisTest02 <- read.csv("PlayTennisTest02.csv", header=TRUE)
> predict(playTennis.tr, playTennisTest02)
  No Yes
[1,] 1 0
[2,] 0 1
> playTennisTest02
  Outlook Temp. Humidity windy Play
1  Sunny Cool   High  True  No
2  Rainy Mild   Normal False Yes

結果は勿論、想定通り。なお、パラメータに type があり、type="prob" とすれば確率値の
出力が可能です。

```

```

> predict(playTennis.tr, PlayTennisTest02, type="prob")
  No Yes
[1,] 1 0
[2,] 0 1
# level number, class frequencies, probabilities
> predict(playTennis.tr, PlayTennisTest02, type="matrix")
  [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,] 1 3 0 1 0
[2,] 2 0 3 0 1

```

気がついたかもしれません、tree も rpart も 2分木しか作りません。  
その点では、weka の J48 の方がよくできています。

## 今日の課題

- Naïve Bayes のときの「今日の課題」とデータは同じです。
- rpart を用いて、下図左の訓練データが与えられたとき、下図右のテストデータの属性「スキー」の値を推定せよ。
- Rを使ってください。

雪	天気	シーズン	体調	スキー
ベタ	霧	ロー	回復	no
新雪	晴	ロー	回復	yes
新雪	霧	ロー	回復	yes
ざらめ	霧	ロー	怪我	no
新雪	晴	ロー	怪我	no
ベタ	晴	ロー	回復	yes
新雪	霧	ロー	回復	yes
ベタ	晴	半ば	回復	yes
新雪	晴	ハイ	回復	yes
新雪	風	ロー	回復	yes
ざらめ	霧	半ば	回復	no
新雪	風	ロー	回復	yes
新雪	晴	半ば	回復	yes
ざらめ	風	ハイ	疲労	no

雪	天気	シーズン	体調	スキー
ベタ	風	半ば	疲労	?

## 時間が余る人向け

- 「今日の課題」について、学習データの confusion matrix を作ってください。
- 面倒なことは、rpart木の予測値(predictの出力値)が、no, yes の2列の matrix (行は各データ)になることです。
  - 一方、正解として用意しているのは、yes, no が一列に並んだ配列です。
- 次のような方法が考えられます(いくつもあると思います)
- predict の出力を yes, no の列に変える
  - 例えば、no の列をみて、要素が 0.5より大きければ、“no”にする。lapply が使えます。なお、結果は list になりますので、as.character を使って character に変えます
  - factor を、no の列(または yes の列)に適用してもよい。labels を指定して、level の名前を "yes" と "no" にします。
- 正解値(0, yes を値とする列)を 0, 1 の列にし、predict の出力の no の列(yes の列でもよい)が 0, 1 の列であることを利用する。

なお、最も簡単な解は predict で、type="class" を指定することです。上の問題は「それをしない」方法を考えてみようという、Rの練習問題です。

## まとめ

- 決定木の作り方**
  - 分りやすく、使いやすい。誤差は大きめ。
  - 構築には、greedy アルゴリズム
    - ノードに置く属性の選択: 情報量増分
      - 「増分比」が必要な局面がある。
    - 復習: 情報量について
  - 一つの発展形として、回帰木がある
  - R では、tree, rpart を試してみた