情報意味論(11) Boosting

慶應義塾大学理工学部
櫻井 彰人

競馬で当てるには？

- 予想屋(ではなく専門家に)訊く
- 仮定:
  - 専門家であっても、極めて正確な予測規則を作成することはできない
  - けれども、どんな事例であっても、それを聞けば、ランダム以上の予測をする予測規則を作成することはできる
- よく当たる予測規則を作る方法はあるか？

アイデア

- 専門家に経験則を作ってもらう
- 経験則が失敗する事例を集める (困難事例)
- この困難事例について、専門家に経験則を作ってもらう
- そして…

- こうして得られた経験則をすべて統合する
- 実は、専門家でなくても弱学習アルゴリズム “weak” learning algorithm でよい

課題

- (教えを請うときには)どのレースを選べばよいのか?
  - 最も難しいレースに集中する
    (それまでの経験則では最も外れているレースのこと)
- これらの経験則をどう統合すれば、一つの予測規則にできるのか?
  - 経験則の(重み付き)多数決をとる

Boosting

- boosting = 複数個の低精度の経験則を高精度な予測規則に変換する一般的方法
- より技術的には:
  - 弱(weak)学習アルゴリズム(誤差 $\leq 1/2-\gamma$ なる仮説(分類規則)を常に見出すことができる)が与えられたとき
  - boosting アルゴリズムは、誤差 $\leq \varepsilon$ なる単一の仮説を構成することができる(ことが証明できる)
  - 理論によれば、しばしば、汎化能力はよい

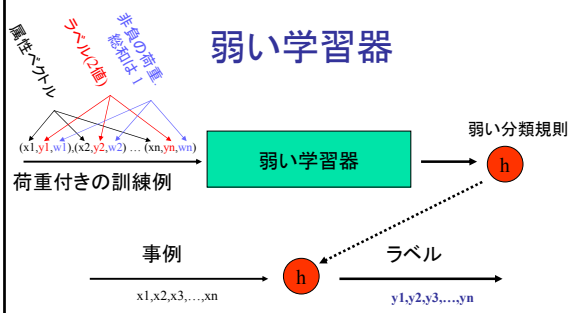
目次

- boosting 入門 (AdaBoost)
- 訓練誤差の解析
- マージンの理論に基づく、汎化誤差の検討
- 結果例

以下のスライドは、主に、下記論文に基づく
Robert E. Schapire. **The boosting approach to machine learning: An overview**. In D. D. Denison, M. H. Hansen, C. Holmes, B. Mallick, B. Yu, editors, *Nonlinear Estimation and Classification*. Springer, 2003.

Robert E. Schapire, Yoav Freund, Peter Bartlett and Wee Sun Lee. **Boosting the margin: A new explanation for the effectiveness of voting methods**. *The Annals of Statistics*, 26(5):1651-1686, 1998.

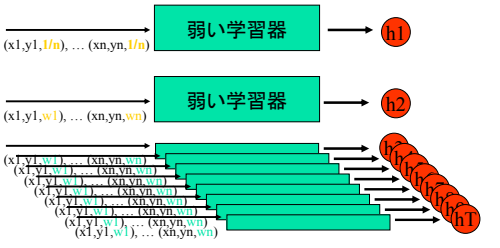
弱い学習器



弱い要請: $\frac{\sum_{i:y_i \neq \mathbf{y}_i} w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} < \frac{1}{2} - \gamma$

（荷重を考慮した）誤答の割合

ブースティングの過程



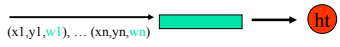
最終規則: Sign[α1 h1 + α2 h2 + … + αT hT]

AdaBoost [Freund & Schapire '97]

- 2値ラベル y = -1,+1
- 出力: Sgn[$\Sigma_t \alpha_t h_t(x)$]

- margin(x,y) = y [$\Sigma_t \alpha_t h_t(x)$]
- h_t に対し, 次の値が最小となるように α_t を選ぶ
  $\Sigma_{(x,y)}$ exp (-margin(x,y))
  = $\Sigma_{(x,y)}$ exp (- y [$\Sigma_t \alpha_t h_t(x)$])

（陽に解けるので、この最小化問題の解の計算は簡単）



ht はどう決めるのか？
wt=Dt と学習器が決める
wt はどう決めるのか？
ht-1 の誤りから決める

AdaBoost の計算手順

- $D_1(i) = 1/m$
- $D_t(\cdot) \Rightarrow h_t(\cdot)$
- $\varepsilon_t = \Pr_{i \sim D_t}[h_t(x_i) \neq y_i] = \sum_{i: h_t(x_i) \neq y_i} D_t(i)$

$$\alpha_t = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-\varepsilon_t}{\varepsilon_t}\right) > 0$$

$$D_{t+1}(i) = \frac{D_t(i)}{Z_t} \cdot \begin{cases} e^{-\alpha_t} & \text{if } y_i = h_t(x_i) \\ e^{\alpha_t} & \text{if } y_i \neq h_t(x_i) \end{cases}$$

ただし、 Z_t は $1 = \sum_{i=1}^{m} D_{t+1}(i)$ となるように定める

- $H_{\text{final}}(x) = \text{sgn}\left(\sum_t \alpha_t h_t(x)\right)$

Yoav Freund and Robert E. Schapire.
A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting.
Journal of Computer and System Sciences, 55(1):119-139, August 1997.

Adaboost の主な性質

- あてずっぽう（正解確率1/2）に対する、弱い学習器の正解率差（正値）: $\gamma_1, \gamma_2, .., \gamma_T$. その時 最終規則の 訓練誤差 は高々

$$\exp\left(-2\sum_{t=1}^{T}\gamma_t^2\right) = \exp\left(-2\sum_{t=1}^{T}(1/2-\varepsilon_t)^2\right)$$

訓練誤りを計算するときの、訓練データの荷重は、初期荷重

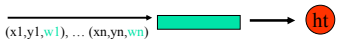
再掲: AdaBoost [Freund & Schapire '97]

- 2値ラベル y = -1,+1
- 出力: Sgn[$\Sigma_t \alpha_t h_t(x)$]

- margin(x,y) = y [$\Sigma_t \alpha_t h_t(x)$]
- h_t に対し, 次の値が最小となるように α_t を選ぶ

  $\Sigma_{(x,y)}$ exp (-margin(x,y))
  $= \Sigma_{(x,y)}$ exp (- y [$\Sigma_t \alpha_t h_t(x)$])

（陽に解けるので、この最小化問題の解の計算は簡単）



ht はどう決めるのか？
wt=Dt と学習器が決める
wt はどう決めるのか？
ht-1 の誤りから決める

最急降下法としての Adaboost

- 探索する、分類器の空間: "弱い仮説" の線形和のなす空間 $\Sigma_t \alpha_t h_t(x)$
- 当初の目標: 誤り数最小の超平面を見つける
  $\Sigma_{(x,y)}$ (1 - y Sgn[$\Sigma_t \alpha_t h_t(x)$])/2
  $= \Sigma_{(x,y)}$ (1 + Sgn[- y $\Sigma_t \alpha_t h_t(x)$])/2
  - NP-hard な問題であることが知られている (d を当該空間の次元とするとき、d の多項式時間で動作するアルゴリズムが存在しないだろう)
- 妥協案: 指数損失関数で(誤り数関数を)代用して、軸毎の最急降下を用いる.
  $\Sigma_{(x,y)}$ exp (- y [$\Sigma_t \alpha_t h_t(x)$])

最小化: 定式化

- 判別関数の損失: $L(F(\cdot)) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \exp(-y_i F(x_i))$
- Adaboost の判別関数:

$$f(x) = \sum_t \alpha_t h_t(x) \qquad H_{\text{final}}(x) = \operatorname{sgn} f(x)$$

- $f(x)$ に新たに仮説 $h(x)$ を加えた関数

$$f(x) + ch(x)$$

の損失 $L(f(\cdot) + ch(\cdot))$ を最小化する c を求めよう

損失関数最小化: 式変形

$$\begin{aligned}
&L(f(\cdot) + ch(\cdot)) \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \exp(-y_i(f(x_i) + ch(x_i))) \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \exp(-y_i f(x_i)) \exp(-y_i ch(x_i)) \\
&= L(f(\cdot))\sum_{i=1}^{m} \frac{\exp(-y_i f(x_i))}{\tilde{Z}} \exp(-y_i ch(x_i)) \\
&= L(f(\cdot))\sum_{i=1}^{m} \tilde{D}(i) \exp(-y_i ch(x_i)) \\
&= L(f(\cdot))\left(\sum_{i:y_i = h(x_i)} \tilde{D}(i) \exp(-y_i ch(x_i)) + \sum_{i:y_i \neq h(x_i)} \tilde{D}(i) \exp(-y_i ch(x_i))\right) \\
&= L(f(\cdot))\left(\exp(-c) \sum_{i:y_i = h(x_i)} \tilde{D}(i) + \exp(c) \sum_{i:y_i \neq h(x_i)} \tilde{D}(i)\right) \\
&= L(f(\cdot))(\exp(-c)(1-\varepsilon) + \exp(c)\varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\tilde{D}(i) = \frac{\exp(-y_i f(x_i))}{\tilde{Z}} \qquad \tilde{Z} = \sum_{i=1}^{m} \exp(-y_i f(x_i)) \qquad \varepsilon = \sum_{i:y_i \neq h(x_i)} \tilde{D}(i)$$

f(x)=0 と考えればよい

なお、 $L(ch(\cdot)) = \exp(-c)(1-\varepsilon) + \exp(c)\varepsilon$ ただし、 $\tilde{D}(i) = 1/m$

損失関数最小化

- 導関数

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dc}L(f(\cdot) + ch(\cdot)) &= \frac{d}{dc}L(f(\cdot))(\exp(-c)(1-\varepsilon) + \exp(c)\varepsilon) \\
&= L(f(\cdot))(-\exp(-c)(1-\varepsilon) + \exp(c)\varepsilon) \\
&= L(f(\cdot))\exp(-c)\varepsilon(-(1-\varepsilon)/\varepsilon + \exp(2c))
\end{aligned}$$

より、 $c = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ のとき $L(f(\cdot) + ch(\cdot)) = L(f(\cdot))\,2\sqrt{(1-\varepsilon)\varepsilon}$
$L(ch(\cdot)) = 2\sqrt{(1-\varepsilon)\varepsilon}$

h はなんでもよいのだが、$c > 0,\ 2\sqrt{(1-\varepsilon)\varepsilon} < 1,\ i.e.\ \varepsilon < 1/2$ となるべし

- すなわち

$$f(x) = \sum_t \alpha_t h_t(x)$$
$$\tilde{D}(i) = \frac{\exp(-y_i f(x_i))}{\tilde{Z}}, \quad \text{where } \tilde{Z} = \sum_{i=1}^{m} \exp(-y_i f(x_i))$$
$$\varepsilon = \sum_{i:y_i \neq h(x_i)} \tilde{D}(i)$$
$$\alpha = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$
$$f_{new}(x) = \sum_t \alpha_t h_t(x) + \alpha h(x)$$

c<0 なら −h を用いる. ε =1/2 はダメ

h に自由度があるとはいえ、損失関数 L がより小さくなるためには、ε が小さい h の方がよい

逐次的アルゴリズムに変換(1)

$$f(x) = \sum_t \alpha_t h_t(x)$$
$$\tilde{D}(i) = \frac{\exp(-y_i f(x_i))}{\tilde{Z}},$$
$$\tilde{Z} = \sum_{i=1}^{m} \exp(-y_i f(x_i))$$
$$\varepsilon = \sum_{i:y_i \neq h(x_i)} \tilde{D}(i)$$
$$\alpha = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$
$$f_{new}(x) = \sum_t \alpha_t h_t(x) + \alpha h(x)$$

$$f_{t-1}(x) = \sum_{s=1}^{t-1} \alpha_s h_s(x)$$
$$D_t(i) = \frac{\exp(-y_i f_{t-1}(x_i))}{\tilde{Z}},$$
$$\text{where } 1 = \sum_{i=1}^{m} D_t(i)$$
$$D_t(\cdot) \Rightarrow h_t(\cdot)$$
$$\varepsilon_t = \sum_{i:y_i \neq h_t(x_i)} D_t(i)$$
$$\alpha_t = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\varepsilon_t}{\varepsilon_t}$$
$$f_t(x) = \sum_{s=1}^{t} \alpha_s h_s(x)$$

$$D_t(\cdot) \Rightarrow h_t(\cdot)$$
$$\varepsilon_t = \sum_{i:y_i \neq h_t(x_i)} D_t(i)$$
$$\alpha_t = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\varepsilon_t}{\varepsilon_t}$$
$$f_t(x) = \sum_{s=1}^{t} \alpha_s h_s(x)$$
$$D_{t+1}(i) = \frac{\exp(-y_i f_t(x_i))}{\tilde{Z}_t},$$
$$\text{where } 1 = \sum_{i=1}^{m} D_{t+1}(i)$$

$$\frac{L(f_t(\cdot))}{L(f_{t-1}(\cdot))} = 2\sqrt{(1-\varepsilon_t)\varepsilon_t}$$

h_t に自由度があるとはいえ、D_t によって定まる ε_t がより小さくなる方がよい。すなわち、D_t を参照しながら、h_t を定めるべし

逐次的アルゴリズムに変換(2)

$D_1(i) = 1/m$

$D_t(\cdot) \Rightarrow h_t(\cdot)$

$$\varepsilon_t = \sum_{i:h_t(x_i)\neq y_i} D_t(i) = \Pr_{i\sim D_t}[h_t(x_i) \neq y_i]$$

$$\alpha_t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\varepsilon_t}{\varepsilon_t}\right) > 0$$

$$D_{t+1}(i) = \frac{D_t(i)}{Z_t}\cdot\begin{cases} e^{-\alpha_t} & \text{if } y_i = h_t(x_i) \\ e^{\alpha_t} & \text{if } y_i \neq h_t(x_i) \end{cases}$$

$$1 = \sum_{i=1}^{m} D_{t+1}(i)$$

$$H_{\text{final}}(x) = \operatorname{sgn}\left(\sum_t \alpha_t h_t(x)\right)$$

$D_t(\cdot) \Rightarrow h_t(\cdot)$

$\varepsilon_t = \sum_{i:y_i\neq h_t(x_i)} D_t(i)$

$\alpha_t = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\varepsilon_t}{\varepsilon_t}$

$f_t(x) = \sum_{s=1}^{t}\alpha_s h_s(x)$

$D_{t+1}(i) = \frac{\exp(-y_i f_t(x_i))}{\tilde{Z}_t}$,

where $1 = \sum_{i=1}^{m} D_{t+1}(i)$

$$D_{t+1}(i) = \frac{\tilde{Z}_{t-1}D_t(i)\cdot\exp(-y_i\cdot\alpha_t\cdot h_t(x_i))}{\tilde{Z}_t} = \frac{D_t(i)}{\tilde{Z}_t/\tilde{Z}_{t-1}}\cdot\exp(-y_i\cdot\alpha_t\cdot h_t(x_i))$$

訓練誤差

- 定理 [Freund and Schapire '97]:

  ε_t を ½ − γ_t と書く. i.e. $\gamma_t = ½ - \varepsilon_t$

  この時 $\text{training error}(H_{\text{final}}) \le \exp\left(-2\sum_t \gamma_t^2\right)$

  従って、もし $\forall t: \gamma_t \ge \gamma > 0$ なら

  $\text{training error}(H_{\text{final}}) \le \exp\left(-2\gamma^2 T\right)$

  訓練誤差は、初期分布（一様分布）で考えている

- 注: AdaBoost は adaptive:
  . γ や T を事前に知っている必要はない

証明（レポート課題）

$$\text{Error}_{\text{Train}}(H_{\text{final}}) = \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}(1 - y_i H_{\text{final}}(x_i))/2\right)$$
$$= \le = = \le = \exp\left(-2\sum\gamma_t^2\right)$$

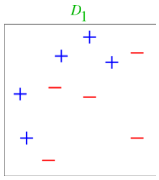
$$L(F(\cdot)) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\exp(-y_i F(x_i))$$

$$\frac{L(f_t(\cdot))}{L(f_{t-1}(\cdot))} = 2\sqrt{(1-\varepsilon_t)\varepsilon_t} = \sqrt{1-4\gamma_t^2}$$

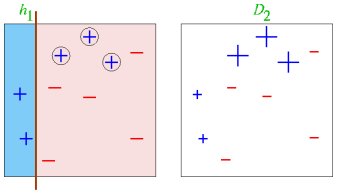
$$L(f_1(\cdot)) = \sqrt{1-4\gamma_1^2}$$

$$\exp(-x) \ge 1 - x \text{ for } x \ge 0$$

トイ



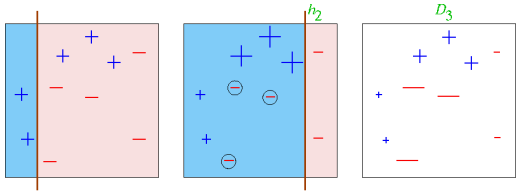
第一巡目



$\varepsilon_1 = 0.30$

$\alpha_1 = 0.42$

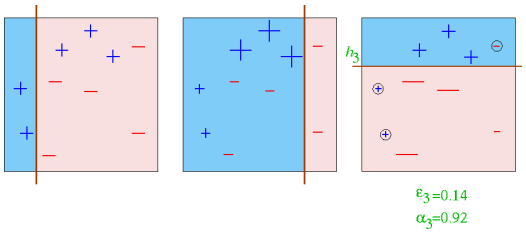
第二巡目



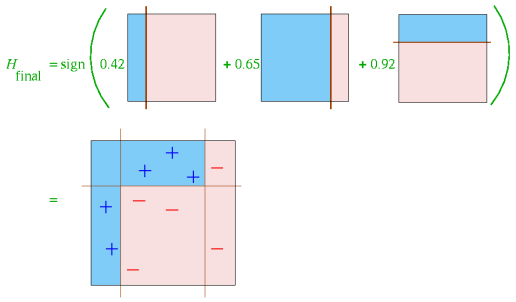
$\varepsilon_2 = 0.21$

$\alpha_2 = 0.65$

第三巡目



最終仮説



Boosting Applet

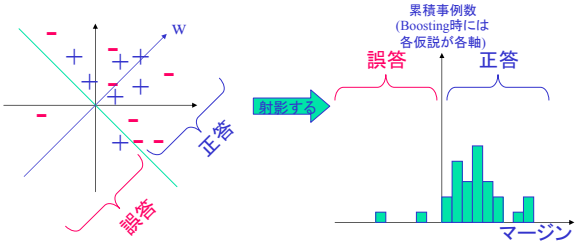
http://www.cse.ucsd.edu/~yfreund/adaboost/index.html

マージンというもの

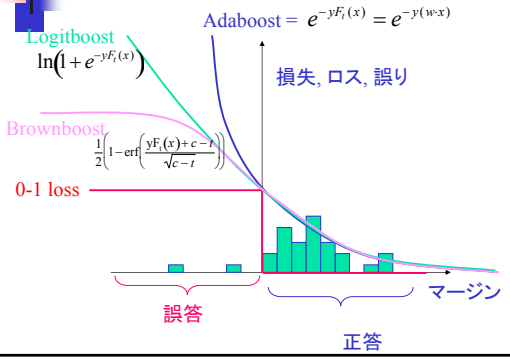
$x, w \in R^n; y \in \{-1,+1\}$　　予測 = $\text{sgn}(w \cdot x)$

マージン = $y(w \cdot x)$

+ / - = $\text{sgn}(y(w \cdot x))$



損失関数



Boosting の形式化

- 所与の訓練データ集合 $X=\{(x_1,y_1),\ldots,(x_m,y_m)\}$
- $y_i \in \{-1,+1\}$ 事例 $x_i \in X$ に対する正しいラベル

- for $t = 1,\ldots,T$:
  - $\{1,\ldots,m\}$ 上の分布 D_t を作成する
  - 弱仮説を見出す

    $h_t : X \to \{-1,+1\}$

    ただし D_t 上で小さい誤差 ε_t あり

    $\varepsilon_t = \Pr_{i \sim D_t}[h_t(x_i) \neq y_i] = \sum_{i:h_t(x_i) \neq y_i} D_t(i)$
- 最終仮説 H_{final} を出力

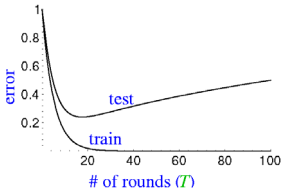
一度に一軸ごと

- Adaboost は指数損失関数に対して 最急降下法 を適用する
- 繰り返し一度につき, 一軸 ("弱い学習器")追加.
- 2進分類器 における弱学習= あてずっぽうよりちょっとよい.
- 回帰における弱学習 – 未解明.
- 事例に対する荷重 を用いて、弱学習器に降下方向を教える
- これによって 計算 を可能とする

良い弱学習器とは?

- 弱学習器(達)は、
- 属性・ラベル間のありうる関係のほとんどと(弱い)相関が表現できるように、十分に柔軟でなければならない.
- 荷重つき訓練誤差を最小化するものが全探索ができるくらい十分に小さくあるべき.
- 過学習とならないよう小さくあるべき.
- ラベルの予測値が非常に効率よく計算できるべき.
- "狭い専門家" であってよい – 入力空間の小さい部分空間内でのみ予測を行い, それ以外では 予測を控える (出力 0)としてよい

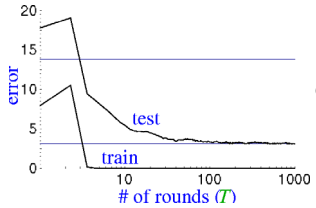
汎化誤差の解析



通常の期待 or 予想:

- 訓練誤差は、継続して、低下する(0になるかも)
- H_{final} が複雑になりすぎると、テスト誤差は、増大する (オッカムの剃刀)

ある実験結果 [Schapire et al. 98]

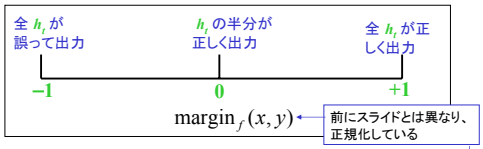


(boosting on C4.5 on "letter" dataset)

- 1,000 巡以降でもテスト誤差は増加しない
  - (C4.5を用いているため) ノード数の合計 ~2,000,000
- 訓練誤差が0となった後も、テスト誤差は減少を続ける
- オッカムの剃刀のいう単純な規則がよいというのは、誤り

http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall05/cos402/readings/boost-slides.pdf

(正規化)マージンからみると



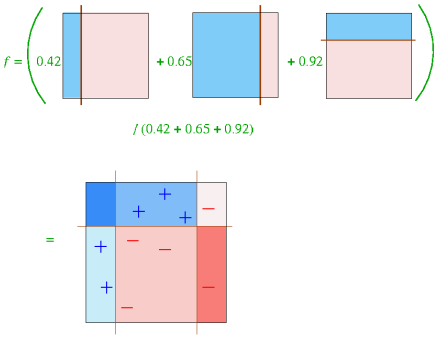
アイデア: 分類の信頼度 (マージン) を考えよう:

- まず下記に注意

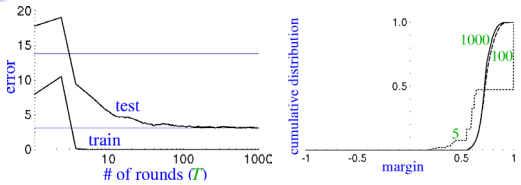
$$H_{\text{final}}(x) = \text{sgn}(f(x)) \qquad \frac{f(x)}{\sum_t |\alpha_t|} = \frac{\sum_t \alpha_t h_t(x)}{\sum_t \alpha_t} \in [-1,1]$$

- 定義: (x,y) のマージン: $\text{margin}_f(x,y) = \dfrac{y \cdot f(x)}{\sum_t |\alpha_t|}$

トイ



マージンの累積分布 [Schapire et al. 98]



epoch	5	100	1000
training error	0.0	0.0	0.0
test error	8.4	3.3	3.1
%margins≤0.5	7.7	0.0	0.0
Minimum margin	0.14	0.52	0.55

Boosting はマージンを最大化する

- 次の損失関数を最小化することであった

$$\sum_i e^{-y_i f(x_i)} = \sum_i e^{-y_i \sum_t \alpha_t h_t(x_i)} = \sum_i e^{-\text{margin}_f(x_i,y_i)\sum_t \alpha_t}$$

(x_i,y_i) のマージンに比例

マージンに基づく解析

汎化誤差を訓練事例のマージンの関数で抑える:

$$\text{error} = \Pr[\text{margin}_f(x,y) \le 0]$$

$$\le \hat{\Pr}[\text{margin}_f(x,y) \le \theta] + \tilde{O}\left(\sqrt{\frac{\text{VC}(H)}{m\theta^2}}\right)$$

θ が大きくとれれば、これは小さくなる

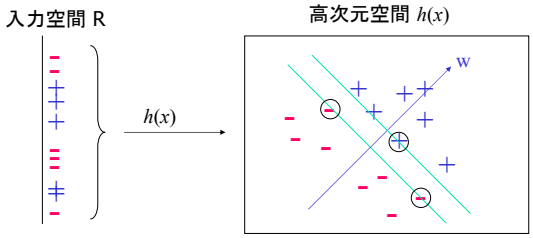
（Pr はデータ空間で、P^r は訓練データ上）
（Hが有限なら VC(H) ~ log |H| ）

$$O\left(\sqrt{\frac{d\log^2(m/d)}{m\theta^2} + \frac{\log(1/\delta)}{m}}\right)$$

- マージン大 ⇒ 上界が小さいくなる
- 上界は学習エポック数に依存しない
- boosting は、マージンが最小の事例に着目することにより、訓練事例のマージンを増加させる傾向にある

SVM との関係

SVM: x を高次元空間に写像して、線形分離する



SVM との関係（続）

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{if } 2x^5 - 5x^2 + x > 10 \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\vec{h}(x) = (1, x, x^2, x^3, x^4, x^5)$$
$$\vec{\alpha} = (-10, 1, -5, 0, 0, 2)$$

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{if } \vec{\alpha}\cdot\vec{h}(x) > 0 \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

SVM との関係

- どちらもマージンを最大化する:

$$\theta \equiv \max_w \min_i \frac{y_i(\vec{\alpha}\cdot\vec{h}(x_i))}{\|\vec{\alpha}\|}$$

- SVM: $\|\vec{\alpha}\|_2$ ユークリッドノルム (L_2)
- AdaBoost: $\|\vec{\alpha}\|_1$ マンハッタンノルム (L_1)
  但し、近似

- 最適化や PAC による上界と関係がでてくる

[Freund et al '98]

AdaBoost の実用的価値

- かなり速い
- 単純かつ容易にプログラムできる
- チューニングパラメータは一個だけ (T)
- 事前知識不要
- 融通性: どんな分類器とも組合せ可能 (ニューラルネット, C4.5, …)
- 有効性が証明済み (弱学習器は仮定する)
  - 発想の転換: 目標は、単に、random guessing よりよい仮説を見つければよいだけ
- はずれ値も見つける

御注意

- 性能は、データと当該弱学習器に依存
- AdaBoost が失敗するのは
  - 弱学習器が複雑すぎる (過学習)
  - 弱学習器が弱すぎる ($\gamma_t \to 0$ となるのが速すぎる)

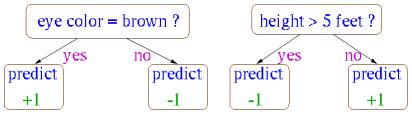
$$\text{training error}(H_{\text{final}}) \le \exp\left(-2\sum \gamma_t^2\right)$$

    - 学習不足
    - マージンが小 → 過学習
- 経験的には, AdaBoost はノイズの影響を受けやすいように思われる

UCI ベンチマーク

比較

- C4.5 (Quinlan の決定木学習)
- Decision Stumps (切株. ノード一個)



UCI 結果[Schapire et al. 98]

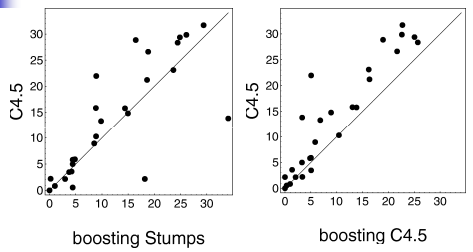
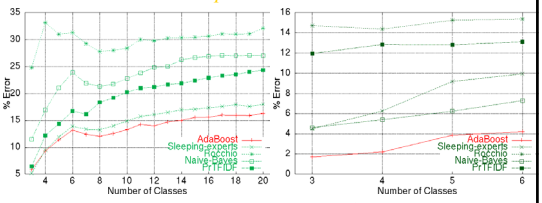


Figure 3: Comparison of C4.5 versus boosting stumps and boosting C4.5 on a set of 27 benchmark problems as reported by Freund and Schapire [30]. Each point in each scatterplot shows the test error rate of the two competing algorithms on a single benchmark. The y-coordinate of each point gives the test error rate (in percent) of C4.5 on the given benchmark, and the x-coordinate gives the error rate of boosting stumps (left plot) or boosting C4.5 (right plot). All error rates have been averaged over multiple runs.

テキスト分類[Schapire&Singer 00]

- Decision stumps: 単語や短句の存在/不存在. 例:

"If the word Clinton appears in the document predict document is about politics"



データ: AP　　データ: Reuters

他の比較 [Quinlan, '96]

	C4.5 err (%)	Bagged C4.5 vs C4.5 err (%)	Bagged C4.5 vs C4.5 w-l	Bagged C4.5 vs C4.5 ratio	Boosted C4.5 vs C4.5 err (%)	Boosted C4.5 vs C4.5 w-l	Boosted C4.5 vs C4.5 ratio	Boosting vs Bagging w-l	Boosting vs Bagging ratio
anneal	7.67	6.25	10-0	.814	4.73	10-0	.617	10-0	.758
audiology	22.12	19.29	9-0	.872	15.71	10-0	.710	10-0	.814
auto	17.66	19.66	2-8	1.113	15.22	9-1	.862	9-1	.774
breast-w	5.28	4.23	9-0	.802	4.09	9-0	.775	7-2	.966
chess	8.55	8.33	6-2	.975	4.59	10-0	.537	10-0	.551
colic	14.92	15.19	0-6	1.018	18.83	0-10	1.262	0-10	1.240
credit-a	14.70	14.13	8-2	.962	15.64	1-9	1.064	0-10	1.107
credit-g	28.44	25.81	10-0	.908	29.14	2-8	1.025	0-10	1.129
diabetes	25.39	23.63	9-1	.931	28.18	0-10	1.110	0-10	1.192
glass	32.48	27.01	10-0	.832	23.55	10-0	.725	9-1	.872
heart-c	22.94	21.52	7-2	.938	21.39	8-0	.932	5-4	.994
heart-h	21.53	20.31	8-1	.943	21.05	5-4	.978	3-6	1.037
hepatitis	20.39	18.52	9-0	.908	17.68	10-0	.867	6-1	.955
hypo	.48	.45	7-2	.928	.36	9-1	.746	9-1	.804
iris	4.80	5.13	2-6	1.069	6.53	0-10	1.361	0-8	1.273
labor	19.12	14.39	10-0	.752	13.86	9-1	.725	5-3	.963
letter	11.99	7.51	10-0	.626	4.66	10-0	.389	10-0	.621
lymphography	21.69	20.41	8-2	.941	17.43	10-0	.804	10-0	.854
phoneme	19.44	18.73	10-0	.964	16.36	10-0	.842	10-0	.873
segment	3.21	2.74	9-1	.853	1.87	10-0	.583	10-0	.684
sick	1.34	1.22	7-1	.907	1.05	10-0	.781	9-1	.861
sonar	25.62	23.80	7-1	.929	19.62	10-0	.766	10-0	.824
soybean	7.73	7.58	6-3	.981	7.16	8-2	.926	8-1	.944
splice	5.91	5.58	9-1	.943	5.43	9-0	.919	6-4	.974
vehicle	27.09	25.54	10-0	.943	22.72	10-0	.839	10-0	.889
vote	5.06	4.37	9-0	.864	5.29	3-6	1.046	1-9	1.211
waveform	27.33	19.77	10-0	.723	18.53	10-0	.678	8-2	.938
average	*15.66*	*14.11*		*.905*	*13.36*		*.847*		*.930*

Table 1: Comparison of C4.5 and its bagged and boosted versions.

Name	Cases	Classes	Attributes Cont	Attributes Discr
anneal	898	6	9	29
audiology	226	6	–	69
auto	205	6	15	10
breast-w	699	2	9	–
chess	551	2	–	39
colic	368	2	10	12
credit-a	690	2	6	9
credit-g	1,000	2	7	13
diabetes	768	2	8	–
glass	214	6	9	–
heart-c	303	2	8	5
heart-h	294	2	8	5
hepatitis	155	2	6	13
hypo	3,772	5	7	22
iris	150	3	4	–
labor	57	2	8	8
letter	20,000	26	16	–
lymph	148	4	–	18
phoneme	5,438	47	–	7
segment	2,310	7	19	–
sick	3,772	2	7	22
sonar	208	2	60	–
soybean	683	19	–	35
splice	3,190	3	–	62
vehicle	846	4	18	–
vote	435	2	–	16
waveform	300	3	21	–

まとめ

- boosting は分類課題に有用
  - 豊富な理論に裏付けられる
  - 実験的にも、パフォーマンスの良さが確認ずみ
  - しばしば (いつも、ではない) 過学習しにくい
  - 応用事例多い
- しかし
  - （得られた）分類器は遅い
  - 結果は、分かりにくい
  - ノイズに敏感なことあり

参考文献

- Leo Breiman. **Prediction games and arcing classifiers**. Technical Report 504, Statistics Department, University of California at Berkeley, 1997.
- Yoav Fruend and Robert E Schapire. **A decision-theoretic generalization of the on-line learning and an application to boosting**. Journal of Computer and System Sciences, 55(1):119-139, August 1997.
- Ron Meir and Gunnar Rätsch. **An introduction to boosting and leveraging**. In *Advanced Lectures on Machine Learning (LNAI2600)*, 2003.
- Lev Reyzin (Advisor: Shapire, Robert) **Analyzing Margins in Boosting** Senior Independent Work, Princeton University. 2004.
- Robert E. Schapire. **The boosting approach to machine learning: An overview**. In D. D. Denison, M. H. Hansen, C. Holmes, B. Mallick, B. Yu, editors, *Nonlinear Estimation and Classification*. Springer, 2003.
- Robert E. Schapire, Yoav Freund, Peter Bartlett and Wee Sun Lee. **Boosting the margin: A new explanation for the effectiveness of voting methods**. *The Annals of Statistics*, 26(5):1651-1686, 1998.