情報意味論 (第6回)
ベイズ学習

慶應義塾大学理工学部
櫻井 彰人

目次

- Bayes 定理
- MAP と ML
- Bayes 最適分類器, Gibbs アルゴリズム
- クラスの推定か確率の推定か
- MDL
- Naïve Bayes

Bayes の定理

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\,P(A)}{P(B)}$$

$$P(A,B) = P(A \mid B)P(B)$$
$$= P(B \mid A)\,P(A)$$

例 (Mitchell Chap. 6.2)

ある患者がガンの検査を受けたところ結果が陽性であった.
この患者には、本当に病変があるのだろうか？
なお、当該検査は、本当に病変があるときに陽性となる確率は 98% を誇る. また、病変がないときに正しく陰性となる確率は 97% である.

さらに, 全人口に対するこのガンをもつ率は .008 である.

P(cancer) = .008 P(¬cancer) = .992
P(+ | cancer) = .98 P(– | cancer) = .02
P(+ | ¬cancer) = .03 P(– | ¬cancer) = .97

P(+) = P(+ | c'r) P(c'r) + P(+ | ¬c'r) P(¬c'r)=.0376

$$P(\text{cancer} \mid +) = \frac{P(+ \mid cancer)\,P(cancer)}{P(+)} = \mathbf{.209}$$

例 (Mitchell Exercise 6.1)

2回目の検査(2回は統計的に独立とする)を受け, その結果も陽性であったとしよう. ガンである事後確率はどうなるであろうか?

P(cancer) = .008 P(¬cancer) = .992
P(+ | cancer) = .98 P(– | cancer) = .02
P(+ | ¬cancer) = .03 P(– | ¬cancer) = .97

$P(+_1 +_2) = P(+_1 +_2 \mid c'r)\,P(c'r) + P(+_1 +_2 \mid \neg c'r)\,P(\neg c'r) = .00858$

$$P(\text{cancer} \mid +_1 +_2) = \frac{P(+_1 +_2 \mid cancer)\,P(cancer)}{P(+_1 +_2)} = \mathbf{.896}$$

良く使う公式

乗法の公式(実は、条件付確率の定義！):

$$P(A \wedge B) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

参考: 和事象に対しては

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

全確率の公式:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)\,P(A_i)$$

仮説選択に関して教えてくれること

$$P(h \mid D) = \frac{P(D \mid h)\,P(h)}{P(D)}$$

P(h) = 仮説 h の事前確率
P(D) = 訓練データ D の生起確率
P(h|D) = D が与えられたときの h の生起確率
P(D|h) = h が与えられたときの D の生起確率

データ D を生成したらしい仮説 h を選択することができる！

大切な注: 条件付確率は因果関係(もしあれば)を反映するわけではない

目次

- Bayes 定理
- MAP と ML
- Bayes 最適分類器, Gibbs アルゴリズム
- クラスの推定か確率の推定か
- MDL
- Naïve Bayes

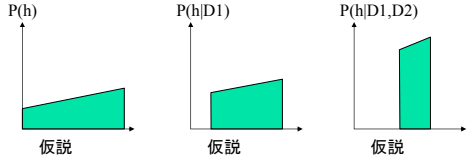
仮説選択

$$P(h \mid D) = \frac{P(D \mid h)\,P(h)}{P(D)}$$

データが所与のとき、必要とするのは、最もありうべき仮説であろう.
事後確率最大仮説(Maximum a posteriori hypothesis) h_{MAP}:

$$\begin{aligned} h_{MAP} &= \arg\max_{h \in H} P(h \mid D) \\ &= \arg\max_{h \in H} \frac{P(D \mid h)\,P(h)}{P(D)} \\ &= \arg\max_{h \in H} P(D \mid h)\,P(h) \end{aligned}$$

ノイズがないときの事後確率の進展



力ずく MAP 仮説学習

1. 各仮説 h について, 事後確率を計算する:

$$P(h \mid D) = \frac{P(D \mid h)\,P(h)}{P(D)}$$

2. 出力する仮説 h_{MAP} は、その中で事後確率最大のもの, 引き分け時はランダムに選択:

$$h_{MAP} = \arg\max_{h \in H} P(D \mid h)\,P(h)$$

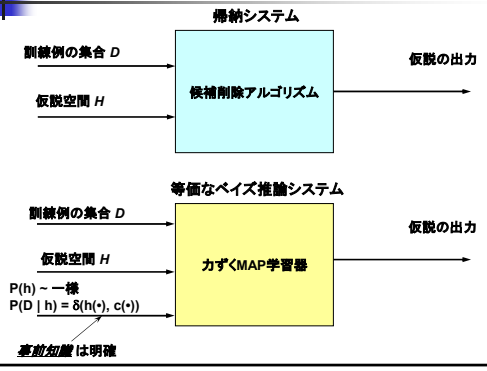
概念学習(FindS)との関係

- 通常の概念学習の課題を考える
  - 事例集合 X, 仮説空間 H, 訓練事例 D
  - FindS は $VS_{H,D}$ から最も特殊な仮説を出力
- Bayes 規則が選ぶ MAP仮説は？
- FindS は MAP 仮説を出力するか？

概念学習との関係

- 事例集合 $\{x_1,\ldots,x_m\}$ を固定
- 訓練集合 D は $\{c(x_1),\ldots,c(x_m)\}$
- 次のような h を選ぶ
  - $P(D|h)=1$, h がDと整合していれば
  - $P(D|h)=0$, そうでなければ
- P(h)=1/|H|, すなわち一様分布とする
  $P(h|D)=1/|VS_{H,D}|$, h がDと整合していれば
  $P(h|D)=0$, そうでなければ

一般には



仮説選択(続)

全ての i, j について $P(h_i) = P(h_j)$ と仮定すれば, より簡単化でき, 最尤Maximum Likelihood (ML) 仮説 を選ぶことになる

$$h_{MAP} = \arg\max_{h\in H} P(D\,|\,h)\,P(h)$$
$$h_{ML} = \arg\max_{h\in H} P(D\,|\,h)$$

ML推定のもう一つの解釈

- 現実世界では、事前確率分布は、未知か、計算不能か、存在しないと思われる
  - 例えば、文書における単語の生起頻度の事前分布はあるのだろうか？ 年齢、社会的背景、人口分布で大きく異なりうる
- 事前確率分布が存在しないとしたら、尤度最大化は自然な考え

目次

- Bayes 定理
- MAP と ML
- Bayes 最適分類器, Gibbs アルゴリズム
- クラスの推定か確率の推定か
- MDL
- Naïve Bayes

未知事例の最もありうる分類

- これまで、事例 D のもとでの最もありうる仮説を求めてきた(例: h_{MAP})。
- 未知事例の最もありうる(確率が高い)分類はどうなるのであろうか？
  - $h_{MAP}(x)$ は最もありうる分類ではない！
    - 次の例で、x のもっともありうる類別は？
    - 3仮説: $P(h_1|D)=0.4$, $P(h_2|D)=0.3$, $P(h_3|D)=0.3$
    - 新事例: $h_1(x)=+$, $h_2(x)=-$, $h_3(x)=-$

Bayes 最適な分類器

$$\arg\max_{c_j \in \{+,-\}} \sum_{h_i \in H} P(c_j \mid h_i) P(h_i \mid D)$$

注: Bayes 最適な分類器は H に含まれるとは限らない

注: 実行可能か？

注: 論文にはうまくいくと報告されているのだが、試してみるとMAPやMLと変わらない場合がある。どのような場合にそうなるか、興味のあるところである

例 (Mitchell Chap. 6.7)

$P(h_1 \mid D) = .4$ $P(- \mid h_1) = 0$ $P(+ \mid h_1) = 1$
$P(h_2 \mid D) = .3$ $P(- \mid h_2) = 1$ $P(+ \mid h_2) = 0$
$P(h_3 \mid D) = .3$ $P(- \mid h_3) = 1$ $P(+ \mid h_3) = 0$

それゆえ:

$$\sum_{h_i \in H} P(+ \mid h_i) P(h_i \mid D) = .4$$
$$\sum_{h_i \in H} P(- \mid h_i) P(h_i \mid D) = .6$$

そして:

$$\arg\max_{c_j \in \{+,-\}} \sum_{h_i \in H} P(c_j \mid h_i) P(h_i \mid D) = -$$

Gibbs 分類器 (Mitchell Chap. 6.8)

1. 仮説を P(h|D) に従ってランダムに選ぶ
2. 新事例をこれに従い分類する

慶賀: もし仮説を事前分布 P(h) に従ってランダムに選ぶと,

$E[\text{error}_{\text{Gibbs}}] \le 2E[\text{error}_{\text{BayesOptimal}}]$

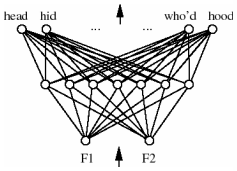
(詳細は “Machine Learning”)

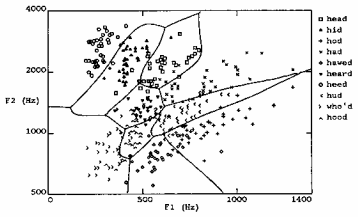
仮説の個数が多くて、ベイズ最適な分類器が計算できないときに有用

目次

- Bayes 定理
- MAP と ML
- Bayes 最適分類器, Gibbs アルゴリズム
- クラスの推定か確率の推定か
- MDL
- Naïve Bayes

ニューラルネットでは





出力値は、実数であり、シグモイド関数を出力関数とすると、例えば[0,1]とすることができる。クラスごとに出力素子を用意すれば、そのクラスへの所属確率を出力しているとも解釈できる。
教師信号は、クラス種別でもよいが、その「クラスらしさ」ともできる。
後者の場合、確率の学習（回帰）とも考えることができる。

学習方法2通り

分類結果の出力: 確率

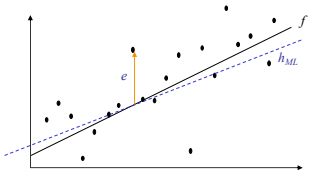
教えるのは分類クラス。しかし学習結果が確率と解釈可能

回帰結果の出力: 値

教師信号として、確率値を与える。

実数値の学習（回帰分析）

ところで、回帰分析とは？



実数値の学習（回帰分析）続

学習事例: $<x_i, d_i>$ 但し

$d_i = f(x_i) + e_i$

e_i はノイズ = iid なる正規分布に従う確率変数で、平均=0 かつ分散は有限とする

iid=independent, identically distributed

random variable

ならば (仮説):

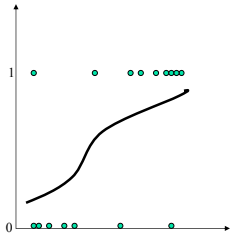
$$h_{ML} = \arg\min_{h \in H} \sum_{i=1}^{m} (d_i - h(x_i))^2$$

実数値の学習（回帰分析）続

$$\begin{aligned} h_{ML} &= \arg\max_{h \in H} \ln p(D \mid h) \\ &= \arg\max_{h \in H} \ln \prod_{i=1}^{m} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d_i - h(x_i)}{\sigma}\right)^2} \\ &= \arg\max_{h \in H} \sum_{i=1}^{m} -\frac{1}{2}\left(\frac{d_i - h(x_i)}{\sigma}\right)^2 \\ &= \arg\max_{h \in H} \sum_{i=1}^{m} -(d_i - h(x_i))^2 \\ &= \arg\min_{h \in H} \sum_{i=1}^{m} (d_i - h(x_i))^2 \end{aligned}$$

確率を予測するように学習する

クラス種別を教えるのに、確率を学ぶとは？



確率を予測するように学習する

- 例: 生存確率を患者データから学習する

$$\begin{aligned} h_{ML} &= \arg\max_{h \in H} \ln p(D \mid h) \\ &= \arg\max_{h \in H} \ln \prod_{i=1}^{m} P(d_i \mid h, x_i) P(x_i) \\ &= \arg\max_{h \in H} \sum_{i=1}^{m} \ln[P(d_i \mid h, x_i) P(x_i)] \\ &= \arg\max_{h \in H} \sum_{i=1}^{m} \ln\left(h(x_i)^{d_i}(1 - h(x_i))^{1-d_i} P(x_i)\right) \\ &= \arg\max_{h \in H} \sum_{i=1}^{m} d_i \ln h(x_i) + (1 - d_i) \ln(1 - h(x_i)) \end{aligned}$$

d_i は 0 or 1 (または所属確率)

注: cross entropy $H(p,q) = -\sum_x p(x) \log q(x) = H(p) + D_{KL}(p \| q)$

目次

- Bayes 定理
- MAP と ML
- Bayes 最適分類器, Gibbs アルゴリズム
- クラスの推定か確率の推定か
- MDL
- Naïve Bayes

Occam の剃刀

- 人口に膾炙しているのは
  - Entities should not be multiplied beyond necessity.
- Bertrand Russell によれば
  - It is vain to do with more what can be done with fewer.
- 最も普通の解釈
  - Among the theories that are consistent with the observed phenomena, one should select the simplest theory.

Occam の剃刀: 蛇足

- もっと以前から言われていたといわれる。表現も複数ある。
  - Wikipedia参照
  - 最近であれば "The philosophy of John Duns Scotus" の第8.2節
  - 古ければ、"The Myth of Occam's Razor" Mind, 27(107), 345-353 (1918)
- Albert Einstein: "Theories should be as simple as it is, but not simpler."
- 残差があるときは単に「単純に」とはいえない
- 「仮定」を入れても、それにより複数の現象が一つの理論で説明可能となるなら、これも単純化
  - 例: 未だ見えなかった分子による、現象の説明
- 単に「概念の個数」だけを数えるのでは、誤る。理論全体の長さを考えるべき
  - そして、残差の「長さ」も

最小記述長(minimum description length)

- Occam's razor: "最短仮説を選べ"

$$h_{MDL} = \arg\min_{h \in H} L_{C_1}(h) + L_{C_2}(D \mid h)$$

ex. 木を記述するビット数 ∝ 記述する符号の長さ

h が所与のとき、D を記述するビット数 ∝ 誤分類データの個数

このままでは、使えない。使うようにした方法がある
1. Rissanen による統計的MDL
2. Kolmogorov/Chaitin のプログラム複雑度に基づくMDL

であり、Lin & Vitanyi グループによるもの

最小記述長 符号的解釈

- MDL: 次を最小化する仮説を選ぶ

$$\begin{aligned} h_{MAP} &= \arg\max_{h \in H} P(D \mid h) P(h) \\ &= \arg\min_{h \in H} -\log_2 P(D \mid h) - \log_2 P(h) \\ &= \arg\min_{h \in H} L_{C2}(D \mid h) + L_{C_1}(h) \end{aligned}$$

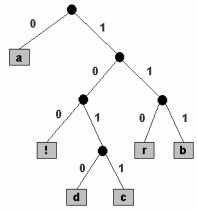
蛇足: 確率と符号長

- 有限または可付番無限集合 Xを考える
  - Xの符号 $C(x)$ とは
    - Xから $U_{n>0}\{0,1\}^n$ への1-to-1 写像
    - $L_C(x)$: 符号Cを用いた時の符合長(ビット)
  - P: X上で定義した確率分布
    - $P(x)$: xの確率
    - 観測値の系列(通常は iid) $x_1, x_2, \ldots, x_n$: x^n

$$P(x^n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i)$$

蛇足:確率と符号長: 接頭符号(語頭符号)

- 接頭符号: 瞬時復号可能な符号の例
  - どの符号も他の符号の語頭にはなっていない



a	0
b	111
c	1011
d	1010
r	110
!	100

http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spring04/cos126/

蛇足: 確率と符号長: 最適符号

- ある符号 C の符号長の期待値

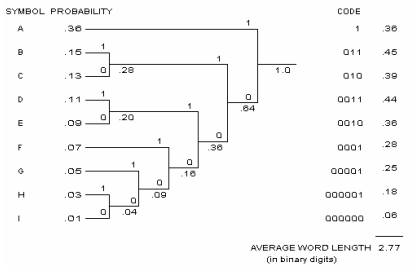
$$E_P(L_C(x)) = \sum_{x \in X} P(x) L_C(x)$$

  - 下界:

$$H(x) = -\sum_{x \in X} P(x) \log_2 P(x)$$

- 最適符号
  - 瞬時復号可能な符号の中で期待符号長が最小
  - 仮に分布 P が与えられた時、どう設計せればよいか?
    - Huffman 符号

蛇足: 確率と符号長: ハフマン符号



http://star.itc.it/caprile/teaching/algebra-superiore-2001/

蛇足: 確率と符号長: 有限個数

- {1, 2, …, M} の符号語を設計するには?
  - 一様分布を仮定すれば: それぞれの数に $1/M$
  - ~log$M$ ビット

蛇足: 確率と符号長: 無限集合なら

- 正整数すべての符号を設計するには?
  - それぞれの k について
    - まず先頭に $\lceil \log k \rceil$ 個の0をおき
    - 次に一個の 1 をおき
    - そして k を符号化する。ただし $\{1,\ldots,2^{\lceil \log k \rceil}\}$ の符号
    - 長さは合計 ~ 2log$k$ + 1 ビット
  - 勿論、改善は可能…

蛇足: 確率と符号長: 双対性(?)

- P を X 上の確率分布としよう。そうすると X に対する符号 C で次の条件を満たすものがある:

$$L_C(x) = \lceil -\log P(x) \rceil$$

- C を X 上の即時復号可能な符号とする. そうすると確率分布 P で次の条件を満たすものがある:

$$L_C(x) = -\log P(x)$$

$$L_C(x^n) = -\log P(x^n)$$

再掲: 最小記述長 符号的解釈

- MDL: 次を最小化する仮説を選ぶ

$$\begin{aligned} h_{MAP} &= \arg\max_{h \in H} P(D \mid h) P(h) \\ &= \arg\min_{h \in H} -\log_2 P(D \mid h) - \log_2 P(h) \\ &= \arg\min_{h \in H} L_{C_2}(D \mid h) + L_{C_1}(h) \end{aligned}$$

目次

- Bayes 定理
- MAP と ML
- Bayes 最適分類器, Gibbs アルゴリズム
- クラスの推定か確率の推定か
- MDL
- 誤差関数
- Naïve Bayes

Naïve Bayes 分類器

- 単純だが(だから？)よく知られた分類方法
  - 単純な割には高精度
  - 単純なだけに、高速
- Bayes 定理 + 仮定 *条件付独立*
  - 実際には成り立たないことが多い仮定
  - それにも関わらず, 実際にはしばしばうまくいく
- 成功事例:
  - 文書分類
  - 診断

Bayes 定理を使う場合の課題

- 変数 x の属性$<a_1,\ldots,a_n>$が与えられたとき, x が属するクラス v を最尤推定するには?

$$v_{MAP} = \arg\max_{v_j \in V} P(v_j \mid a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$= \arg\max_{v_j \in V} \frac{P(a_1, a_2, \ldots, a_n \mid v_j) P(v_j)}{P(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$$
$$= \arg\max_{v_j \in V} P(a_1, a_2, \ldots, a_n \mid v_j) P(v_j)$$

- 問題: 大量のデータが $P(a_1 \ldots a_n|v_j)$ を評価するのに必要. パラメータ数が膨大 ($\Pi|A_i|$) (2値属性の場合、属性数が n なら 2^n 個)だから

Naïve Bayes 分類器

- Naïve Bayes の仮定: 属性同士は、属するクラスが所与なら、独立
  - $P(a_1,\ldots,a_n|v_j) = P(a_1|v_j)\ P(a_2|v_j)\ \ldots\ P(a_n|v_j)$
  - *条件付独立性* (クラスが所与の時)とも
  - 推定すべきパラメータ数の削減:
    $\Pi|A_i|$ (=$O(2^n)$) $\rightarrow$ $\Sigma|A_i|$ (=$O(n)$)
- この仮定のもと, v_{MAP} は

$$v_{NB} = \arg\max_{v_j \in V} P(v_j) \prod_i P(a_i \mid v_j)$$

Naïve Bayes: アルゴリズム

Naïve_Bayes_Learn(事例集合)

それぞれの目標クラス v_j

$\hat{P}(v_j) = P(v_j)$ の推定値

各属性 a の各属性値 a_i ごとに

$\hat{P}(a_i|v_j)\ =\ P(a_i|v_j)$ の推定値

Classify_New_Instance(x)

$$v_{NB} = \arg\max_{v_j \in V} \hat{P}(v_j) \prod_i \hat{P}(a_i \mid v_j)$$

Naïve Bayes: 推定

- どうやって $P(v_j)$ と $P(a_i|v_j)$ を推定するか?
  - 統計学が教える標準的な方法
    - サンプルの頻度から確率を推定する
    - $P(v)$ の推定値は $\text{count}(v) / N$
    - $P(A|B)$ の推定値は $\text{count}(A \wedge B) / \text{count}(B)$
  - 例: 100 事例. 内訳 70 + と 30 –
    - P(+)=0.7 かつ P(-)=0.3
    - 70 個の正例のなかに, 35 個で a_1=SUNNY
    - P(a_1=SUNNY|+)=0.5

例

Day	Outlook	Temperature	Humidity	Wind	Play Tennis
Day1	Sunny	Hot	High	Weak	*No*
Day2	Sunny	Hot	High	Strong	*No*
Day3	Overcast	Hot	High	Weak	Yes
Day4	Rain	Mild	High	Weak	Yes
Day5	Rain	Cool	Normal	Weak	Yes
Day6	Rain	Cool	Normal	Strong	*No*
Day7	Overcast	Cool	Normal	Strong	Yes
Day8	Sunny	Mild	High	Weak	*No*
Day9	Sunny	Cool	Normal	Weak	Yes
Day10	Rain	Mild	Normal	Weak	Yes
Day11	Sunny	Mild	Normal	Strong	Yes
Day12	Overcast	Mild	High	Strong	Yes
Day13	Overcast	Hot	Normal	Weak	Yes
Day14	Rain	Mild	High	Strong	*No*

$$P(Y) = 9/14,$$
$$P(sunny \mid Y) = 2/9,$$
$$P(cool \mid Y) = 3/9,$$
$$P(high \mid Y) = 3/9,$$
$$P(strong \mid Y) = 3/9$$

Naïve Bayes: 例

- 例の *PlayTennis*, と新事例
  <Outlk=sun, Temp=cool, Humid=high, Wind=strong>
- 計算したいのは:

$$v_{NB} = \arg\max_{v_j \in V} \hat{P}(v_j) \prod_i \hat{P}(a_i \mid v_j)$$

- $\hat{P}(Y)\hat{P}(sun \mid Y)\hat{P}(cool \mid Y)\hat{P}(high \mid Y)\hat{P}(strong \mid Y) = 0.005$
  $\hat{P}(N)\hat{P}(sun \mid N)\hat{P}(cool \mid N)\hat{P}(high \mid N)\hat{P}(strong \mid N) = 0.021$

$$\Rightarrow v_{NB} = No$$

Naïve Bayes: 条件付独立は必須か？

- もし仮定が成り立たなかったら?
  - i.e. if $P(a_1,\ldots,a_n|v_j) \neq P(a_1|v_j)\ P(a_2|v_j)\ldots P(a_n|v_j)$
- それでも、下記の(弱い)条件が成り立つ限り、予測値は Bayes 予測値と等価:

$$\arg\max_{v_j \in V} P(a_1 \mid v_j)P(a_2 \mid v_j)...P(a_n \mid v_j)P(v_j)$$
$$= \arg\max_{v_j \in V} P(a_1, a_2, ..., a_n \mid v_j)P(v_j)$$

- しかし、予測時に求める *確率* は 0 や 1 に極めて近い非現実的な値になりうる

Naïve Bayes: 困ること

- もしも、あるクラス v_j で属性値 a_i が観測されなかったら？
  - 推定値 $P(a_i|v_j)$=0 なぜなら count$(a_i \wedge v_j) = 0$?
  - 影響は甚大: これが 0 だと積は 0!
- 解: Laplace correction を用いる
  - $\hat{P}(a_i \mid v_j) = \dfrac{n_c + mp}{n + m}$
  - n 訓練例数. 但し $v = v_j$
  - n_c 訓練例数. 但し $v = v_j$ かつ $a = a_j$
  - p 先験確率(の推定値) $\hat{P}(a_i|v_j)$ (通常は一様分布)
  - m "仮想" 事例数(しばしば、当該属性 a の属性値の個数を用いる)
    m=1 とする方法がある。その方が結果がよいことがある

文書分類の学習

- 適用事例:
  - どのニュースが興味あるかを学習する
  - あるニュースがどのニュースグループのものかを判定できるように学習する
  - web ページをトピックで分類することを学習する
- Naïve Bayes が結構うまくいく
  - どうやって Naïve Bayes を用いるか?
  - ポイント: どう事例(すなわち、1文書)を表現するか? 属性は何か?

事例の表現 or 属性

- 属性 = 単語の出現位置
  - i.e. 属性 i は文書中の第 i 番目の単語位置
  - 属性値 = その位置に現れる単語
    - doc = $(a_1=w_1, a_i=w_k, \ldots, a_n=w_n)$
  - 更なる仮定: ある特定の単語がある確率は、その位置とは独立
    - ある文書 doc = $(a_1=w_1, a_i=w_k, \ldots, a_n=w_n)$ について
    - $P(a_i=w_k|v_j) = P(a_m=w_k|v_j) = P(w_k|v_j)\ \forall i,m$
    - $P(\text{doc}|v_j) = P(a_1=w_1, a_2=w_2, \ldots, a_n=w_n|v_j)$
      $= P(w_1|v_j)^{TF(w1)} P(w_2|v_j)^{TF(w2)} \ldots P(w_n|v_j)^{TF(wn)}$
      ただし TF(w) は単語 w の doc における出現度数(term frequency)

Naïve Bayes による文書分類

- ある doc = $(a_1{=}w_1,\ldots, a_i{=}w_k, \ldots, a_n{=}w_n)$ につき

$$v_{NB} = \arg\max_{v_j \in V} P(v_j) \prod_{i=1}^{|doc|} P(a_i \mid v_j)$$

$$= \arg\max_{v_j \in V} P(v_j) \prod_{w_k \in Voc} P(w_k \mid v_j)^{TF(w_k, doc)}$$

ただし、$TF(w_k,\text{doc})$=doc中のw_kの出現度数

- なお下記の推定値を使用; ただし、n_j=クラスv_j中の全単語出現度数, $n_{k,j}$=クラスv_j中の単語w_k出現度数

$$P(w_k \mid v_j) = \frac{n_{k,j}+1}{n_j + |Voc|}$$

アルゴリズム

procedure learn_naïve_bayes_text(*E*: 文書集合, V: クラス集合)
Voc = E に現れる全ての単語とトークン(stop word は除く)の集合
E 中の w_k と V 中の v_j すべてについて, $P(v_j)$ と $P(w_k|v_j)$ を推定する:
N_j = クラス j の文書の数
N = 文書の総数
$P(v_j) = N_j/N$
n_{kj} = クラス j の全文書中の単語 w_k の出現数
n_j = クラス j 中の単語出現数
$P(w_k|v_j) = (n_{kj}+1)/(n_j+|Voc|)$

procedure classify_naïve_bayes_text(A: 文書)
A から, Voc にない単語とトークンすべてを除去
return $\text{argmax}_{vj\in V} P(v_j) \prod_i P(a_i|v_j) = \text{argmax}_{vj\in V} P(v_j) \prod_{wk\in Voc} P(w_k|v_j)^{TF(wk,A)}$

Twenty News Groups (Joachims 1996)

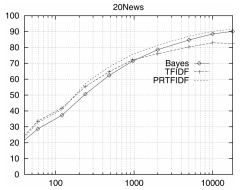
- 各グループ1000の訓練文書
- 新規の文書を、もとのnewsgroupに割振る

comp.graphics	misc.forsale
comp.os.ms-windows.misc	rec.autos
comp.sys.ibm.pc.hardware	rec.motorcycles
comp.sys.mac.hardware	rec.sport.baseball
comp.windows.x & rec.sport.hockey	rec.sport.hockey
alt.atheism	sci.space
soc.religion.christian	sci.crypt
talk.religion.misc	sci.electronics
talk.politics.mideast	sci.med
talk.politics.misc	
talk.politics.guns	

T. Joachims. *A probabilistic analysis of the Rocchio algorithm with TFIDF for text categorization.*
In Proceedings of the 14th International Conference on Machine Learning, Nashville, TN, 1997, pp.143--151.

Twenty News Groups (Joachims 1996)

- Naive Bayes: 89% 分類正解率
  - 頻出単語上位100 個 (the and of …) は除去
    - このように文法機能を担う単語や、文書を類別するのに有効でない単語を stop words として除去するのが普通
  - 頻度が3回に満たない単語は除去
  - 残った単語は、約 38,500 語



精度対訓練データ数(1/3はテスト用にとりおいた)

NewsWeeder (Lang 1995)

- 目標概念 “usenet articles that I find interesting” を学習する
- ユーザはネットニュースを読むときに、興味深さの点数をつける
- 点数のついた文書を訓練例とする
- 点数を自動的につけた文書のうち上位 10% に興味深い文書が含まれる割合は、ユーザが普通に読む文書集合に含まれる割合の 3〜4倍高かった

Lang, K (1995). *NewsWeeder: Learning to Filter News*. Proceedings of the 12th International Conference on Machine Learning, 331-339, Lake Tahoe, CA.

まとめ: Bayes 学習

$$P(h \mid D) = \frac{P(D \mid h)\,P(h)}{P(D)}$$

- 学習アルゴリズムの俯瞰像:
  - ML: P(D|h) の最大化
  - MAP: $P(h|D) \propto P(D|h)\,P(h)$ の最大化
  - Bayes 最適分類器: $P(c|D) = \int P(c|h)P(h|D)\,dh$
- Gaussian ノイズ下の回帰:
  ⇔ 二乗誤差の最小化
- 二値事象の確率の学習
  ⇔ cross-entropy の最小化
- Occam’s Razor:
  - P(h) = description-length(H) としての MAP
- Naive Bayes: 乱暴な仮説だが実用的