情報意味論(11)
PAC学習と VC次元

理工学部管理工学科
櫻井彰人

ポイント

- 仮説空間が無限集合のときのPAC学習
- VC 次元

PAC 学習

- 仮定: H 有限, 答えを含む; m 個の訓練事例は未知の分布 D からの独立サンプル; 誤り率も分布 D で測る; アルゴリズムが決定的であっても事例が分布するため、確率的枠組みを考える
- このとき、少なくとも
$$m \geq \frac{1}{\varepsilon}(\ln|H| + \ln(1/\delta))$$
個の訓練例があれば、$(1-\delta)$ の確率で、選ぶ仮説の “真の” 誤り率は高々 ε.

PAC 学習 1頁証明

- アルゴリズムは D と整合的な仮説を選ぶ
- 整合的な仮説が、誤率≥ ε となる確率は高々 $(1-\varepsilon)^m$
- どの整合的な仮説も、誤率≥ ε となる確率は高々 $|H|(1-\varepsilon)^m$
- $(1-\varepsilon) \leq e^{-\varepsilon}$ である故, この確率は高々 $|H|e^{-\varepsilon m}$
$$\delta \geq |H| e^{-\varepsilon m}$$
$$\ln\delta \geq \ln|H| - \varepsilon m$$
$$m \geq \frac{1}{\varepsilon}(\ln|H| + \ln(1/\delta))$$

PAC 学習可能性

- ある概念集合 C が PAC 学習可能であるとは, 確率 $1-\delta$ と誤差 ε で学習可能、かつ $1/\delta$, $1/\varepsilon$, n, と size(c)の多項式時間で学習可能なこと.
  - n は属性数
- これが意味するのは
  - 多項式サンプル複雑度 polynomial sample complexity
  - 多項式計算時間

例:

- ブーリアンリテラルの連言: $|H|=3^n$
$$m \geq \frac{1}{\varepsilon}(n\ln 3 + \ln(1/\delta))$$
整合的な仮説は多項式時間で見つけることができる
- バイアスのない学習者: $|H|=2^{2^n}$
$$m \geq \frac{1}{\varepsilon}(2^n \ln 2 + \ln(1/\delta))$$

例(続)

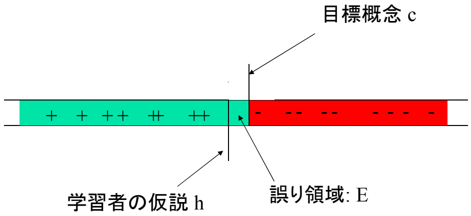
- k-項の DNF:
  $T_1 \vee T_2 \vee \ldots \vee T_k$
- この場合: $|H| \le (3^n)^k$

$$m \ge \frac{1}{\varepsilon}(kn\ln 3 + \ln(1/\delta))$$

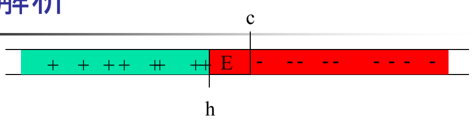
- ゆえに k-項DNFs は PAC 学習可能?

No!　整合的仮説を求める計算時間が NP-hard

仮説空間が無限集合だったら?



解析

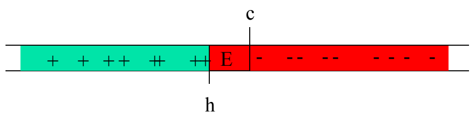


- 仮説 h の誤差: P(h≠c) = P(E)
- P(E)≥ε となる確率は高々 $(1-\varepsilon)^m \le \delta$ (どちらも)
- よって, 確率 $2(1-\varepsilon)^m \le \delta$ で誤差 ≥ε
- すなわち:

$$m \ge \frac{\ln(\delta/2)}{\ln(1-\varepsilon)} \ge \frac{\ln(\delta/2)}{\ln(e^{-\varepsilon})} = \frac{1}{\varepsilon}\ln(2/\delta)$$

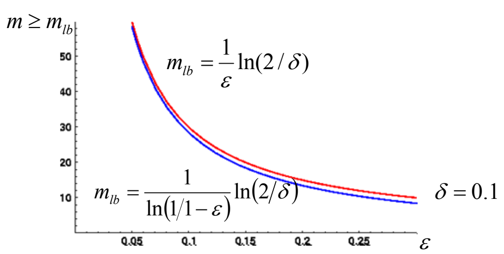
まとめ

- 仮説が無限集合の場合の基礎的結果!



$$m \ge \frac{1}{\varepsilon}\ln(2/\delta)$$

この評価の悪さは?



$\delta \le 2(1-\varepsilon)^m$

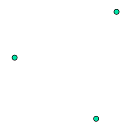
これは一般化できるか?

- 一次元の区間?
- 一般の概念空間?

Shattering:
仮説空間バイアス具合の表現

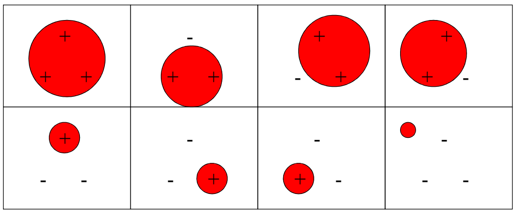
- 事例集合 S を仮説空間 H が shatter するというのは, S のどの2分割に対しても、それと整合的な仮説が H のなかにあること

例: Shattering

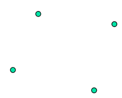


H を全部の円の集合だとする. この図の点集合は H が shatter できるか？

例: Shattering



これはどうだろう?



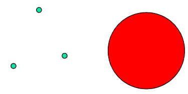
次にこれは?

VC次元: VC(H)

仮説空間 H のVC次元 VC(H) は、H が shatter しうる点の個数の最大値

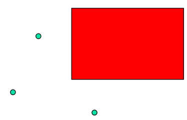
(すなわち: H がバイアスをもたない点の最大個数)
(補足: shatter できないとは、ある分割が H では表現できないということ、すなわち、バイアス（能力の偏り）があるがためある事実（当該分割）が見えない)

例: 円の場合



- VC(H) = 3, というのも 3 点は shatter できるが、4点はできない

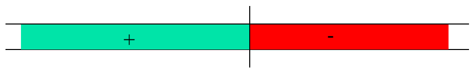
例: 軸並行な長方形



VC(H) = 4

言い忘れたが、「できる」ためには、ある4点を上手に選んでよい。当然「できない」4点は考えなくてよい

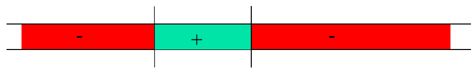
例: 1次元階段関数



VC(H) = 1 if “下がるだけ” のとき

VC(H) = 2 if “上がる” も “下がる” もあるとき

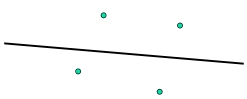
例: 区間



VC(H) = 2 if “間” だけのとき

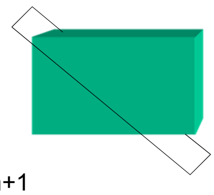
VC(H) = 3 if “間” も “間以外” もあるとき

例: 2D の線形決定境界



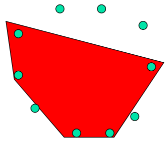
VC(H) = 3

例: n-次元線形決定境界



VC(H) = n+1

VC(H)=∞ はありうるか?



Yes! 凸多角形全部の集合

VC次元と PAC-学習

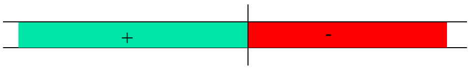
- 定理: 訓練例が m 個

$$m \geq \frac{1}{\varepsilon}(4\log_2(2/\delta) + 8VC(H)\log_2(13/\varepsilon))$$

あれば、学習機械は、確率 1-δ で、誤率が高々 ε の仮説を生成することができる.

V=Vapnik, C=Chervonenkis

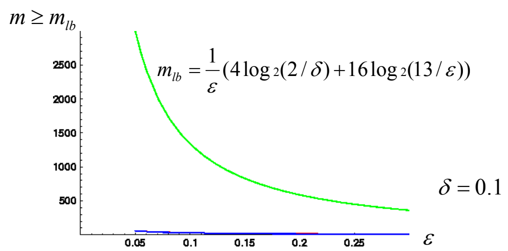
最初の例にもどると…



- VC(H)=2, であるので

$$m \geq \frac{1}{\varepsilon}(4\log_2(2/\delta) + 16\log_2(13/\varepsilon))$$

けれども上界としては、、



$$m_{lb} = \frac{1}{\log_2(1/1-\varepsilon)}\log_2(2/\delta)$$